4.5 Forces dans les fluides-Exercice 8

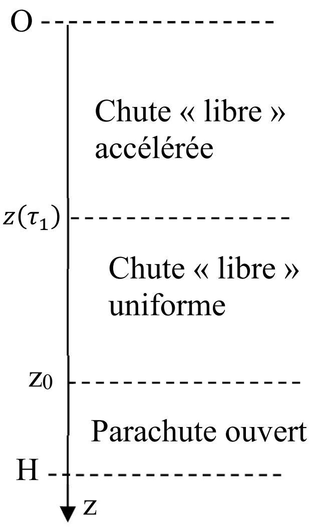
On s'intéresse à la chute d'un parachutiste.
Le parachute possède un diamètre de cinq mètres et un coefficient de traînée $C_x = 1,4$. La densité de l'air est supposée constante égale à $\rho = 1,2$ kg/m^3

Discutez les différentes phases de la chute. Proposez une modélisation du mouvement vertical.

Donnez des conseils pertinents au parachutiste concernant l'altitude optimale d'ouverture du parachute, pour un saut depuis une montagne d'altitude 3000 mètres

4.5 Forces dans les fluides-Exercice 8

$R(Oxyz)$ référentiel terrestre avec Oz verticale descendante.
On note H = 3000 m la hauteur de la montagne, m la masse du parachutiste.
On prend m = 70 kg



Phase 1 : Chute libre avec parachute fermé et prise en compte des frottements de l'air avec un coefficient $C_{x1} = 0{,}4$ (comme une sphère-voir cours)
Le parachutiste a une section $S_1 \approx 0{,}5$ m^2

Principe fondamental de la dynamique : $m\frac{dv}{dt} = mg - \frac{1}{2}\rho C_{x1} S_1 v^2$

Pour $\frac{dv}{dt} = 0$ le parachutiste atteindra la vitesse limite $v_{li} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho C_{x1} S_1}}$

On a : $\frac{dv}{dt} = g(1 - \frac{v^2}{{v_{lim1}}^2})$ Séparation des variables : $\frac{dv}{1-\frac{v^2}{{v_{lim1}}^2}} = gdt$

On pose : $x = \frac{v}{v_{lim1}}$ => $dx = \frac{dv}{v_{lim1}}$ => $\frac{dx}{1-x^2} = \frac{gdt}{v_{lim1}}$

Soit : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{gdt}{v_{lim1}}$ On intègre : $\frac{1}{2}Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{gt}{v_{lim1}} + K$

A $t = 0$, on a $v = 0$ donc $x = 0$ et $K = 0$

On en déduit : $\frac{1+x}{1-x} = e^{\frac{2gt}{v_{lim1}}}$ => $x = \frac{e^{\frac{2gt}{v_{li}}}-1}{e^{\frac{2gt}{v_{lim1}}}+1}$ => $v(t) = v_{lim1}\frac{e^{\frac{2gt}{v_{lim1}}}-1}{e^{\frac{2g}{v_{lim}}}+1}$

Que l'on peut réécrire : $v(t) = v_{li}\frac{sh\left(\frac{gt}{v_{lim}}\right)}{ch\left(\frac{gt}{v_{lim1}}\right)}$ ce qui donne finalement : $\boxed{v(t) = v_{li} \tanh\left(\frac{gt}{v_{lim1}}\right)}$

Puis enfin : $\boxed{z(t) = \frac{v_{lim1}^2}{g}Ln\left(ch\left(\frac{gt}{v_{lim1}}\right)\right)}$

On a $v(t) = 0{,}99v_{lim1}$ à l'instant $\tau_1 = Argth(0{,}99)\frac{v_{lim1}}{g}$

A.N : $v_{lim1} = 76$ m.s^{-1} $= 272$ km.h^{-1} ; $\tau_1 = 20$ s ; $z(\tau_1) = 1140$ m

A partir de τ_1 la chute libre sans parachute se fait à vitesse constante v_{lim1}

Phase 2 : On suppose que le parachute s'ouvre instantanément à l'altitude z_0 et à l'instant t_0

idem avec $C_{x2} = 1{,}4$ et $S_2 = \pi\frac{D^2}{4} \approx 20$ m^2. On a : $v_{lim2} = \sqrt{\frac{2m}{\rho C_{x2} S_2}} \approx 6{,}5$ m.s^{-1} $\ll v_{lim1}$

on aura une expression du même type pour $v(t)$ avec comme condition initiale $v(t_0) = v_{lim1}$

Soit : $\boxed{v(t) = v_{lim2}\tanh\left(\frac{g}{v_{lim2}}(t - t_0) + Argth\left(\frac{v_{lim1}}{v_{lim2}}\right)\right)}$

Puis $\boxed{z(t) = \frac{v_{lim2}^2}{g}Ln\left(\frac{ch\left(\frac{g}{v_{li}}(t-t_0) + Argt\ \frac{v_{lim1}}{v_{lim2}}\right)}{ch\left(Argth\left(\frac{v_{lim1}}{v_{lim2}}\right)\right)}\right) + z_0}$

On a $v(t) = 0{,}99v_{lim2}$ à l'instant $\tau_2 = t_0 + \frac{v_{lim2}}{g}\left(Argth(0{,}99) - Argth\left(\frac{v_{lim1}}{v_{lim2}}\right)\right)$

On veut que cet instant τ_2 corresponde à l'arrivée au sol, soit $z(\tau_2) = H$. On en déduit l'altitude d'ouverture du parachute : $z_0 = H - \frac{v_{li}^2}{g}Ln\left(\frac{ch(Argth(0{,}99))}{ch\left(Argth\left(\frac{v_{lim1}}{v_{lim2}}\right)\right)}\right)$

A.N : $\tau_2 - t_0 \approx 1{,}7$ s ; $z_0 = 2992$ m

D'après ce modèle, le parachutiste pourrait être en chute libre jusqu'à une dizaine de mètres du sol. C'est beaucoup trop optimiste. Il faudrait tenir compte de la phase d'ouverture du parachute qui n'est pas instantanée. En prenant une durée d'ouverture de 5s, parcourue à la vitesse $v_{li} = 76$ m.s^{-1}, cela rajoute une distance d'environ 400 m.
D'après wikipédia, il est conseillé d'ouvrir son parachute à environ 600 mètres du sol.
