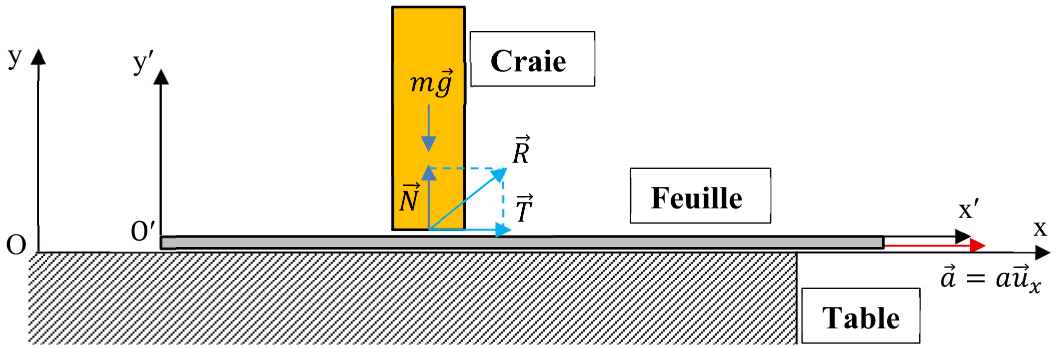
2.2 Lois de Newton-Exercice 9

On pose une craie verticale sur une feuille. Quand on tire vite sur la feuille, la craie reste debout. Si l'on ne tire pas assez rapidement, elle tombe. Expliquer pourquoi.



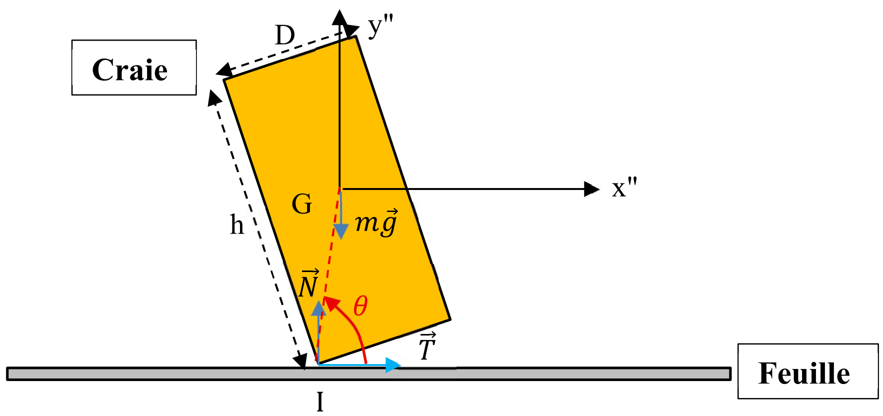
Référentiel $R(Oxyz)$ terrestre supposé galiléen.
Référentiel $R'(Ox'y'z)$ lié à la feuille en translation rectiligne d'accélération constante $\vec{a}$. R' est non galiléen.
f : coefficient de frottement de glissement entre la feuille et la craie

Pour rester debout la craie doit glisser sur la feuille et ne pas basculer à l'instant où elle quitte la feuille.

- On cherche tout d'abord la condition sur a pour qu'il y ait glissement en raisonnant par l'absurde.
  On suppose qu'il y a non glissement : la craie est immobile dans le référentiel R' lié à la feuille.
  Principe fondamental de la dynamique dans R' à la craie de masse m : $\vec{0} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_{ie}$
  Soit : $\begin{cases} 0 = T - ma \\ 0 = -mg + N \end{cases}$
  La craie ne glisse pas sur la feuille si : $T \leq fN$ (Loi de Coulomb) => $a \leq fg$
  Pour que la craie glisse, il faut donc que : $\boxed{a \geq fg}$

- On cherche l'instant où la craie, de position initiale x'_0 quitte la feuille.
  Principe fondamental de la dynamique dans R' à la craie de centre d'inertie G : $m\vec{a}_{G/R'} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_{ie}$
  Soit : $\begin{cases} m\ddot{x}' = T - ma \\ 0 = -mg + N \end{cases}$
  Il y a glissement donc : $T = fN = fmg$
  Donc : $\ddot{x}' = fg - a$ puis : $\dot{x}' = (fg - a)t$ puis : $x' = \frac{1}{2}(fg - a)t^2 + x'_0$
  La craie quitte la feuille à l'instant t_f tel que : $x'(t_f) = 0$ d'où : $\boxed{t_f = \sqrt{\frac{2x'_0}{a - fg}}}$

- On étudie le basculement de la craie dans le référentiel « barycentrique » $R"(Gx"y"z)$ où la craie est en rotation autour de l'axe fixe Gz.



Théorème scalaire du moment cinétique par rapport à Gz à la craie : $J_{Gz}\ddot{\theta} = M_{ext}(Gz) = \overrightarrow{GI} \wedge (\vec{T} + \vec{N})$

2.2 Lois de Newton-Exercice 9

$J_{Gz}\ddot{\theta} = \begin{vmatrix} -IGcos\theta \\ -IGsin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} fmg \\ mg \\ 0 \end{vmatrix} = mgIG(fsin\theta - cos\theta)$ avec $IG = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + h^2}$

Puis : $J_{Gz}\ddot{\theta}\dot{\theta} = mgIG(fsin\theta - cos\theta)\dot{\theta}$ => $\frac{1}{2}J_{Gz}\dot{\theta}^2 = mgIG(-fcos\theta - sin\theta) + K$

A t = 0 : $0 = mgIG(-fcos\theta_0 - sin\theta_0) + K$ avec $tan\theta_0 = \frac{h}{D}$

Donc : $\dot{\theta}^2 = \frac{2mgIG}{J_{Gz}}(f(cos\theta_0 - cos\theta) + (sin\theta_0 - sin\theta))$

Soit : $\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2mgI}{J_{Gz}}}\sqrt{f(cos\theta_0 - cos\theta) + (sin\theta_0 - sin\theta)}$ ou $\frac{d\theta}{\sqrt{f(cos\ \ _0-co\ \ )+(si\ \ _0-si\ \ )}} = \sqrt{\frac{2mgIG}{J_{Gz}}}$dt

Il n'y a pas basculement de la craie tant que $\theta < \frac{\pi}{2}$.

La durée nécessaire pour atteindre le basculement est : $t_{basc} = \sqrt{\frac{J_{Gz}}{2mgI}}\int_{\theta_0}^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{f(cos\theta_0-cos\ \ )+(sin\theta_0-sin\theta)}}$

Cette durée ne dépend pas de l'accélération a de la feuille.

<u>Conclusion</u> : La craie ne tombera pas si $t_f < t_{basc}$ soit : $\sqrt{\frac{2x\prime_0}{a-fg}} < t_{basc}$

Cette condition est d'autant plus facilement vérifiée que a est grande, donc que l'on tire vite la feuille