3.3 Diffusion thermique-Exercice 30

Une tasse cylindrique de rayon intérieur a et d'épaisseur e contient du café à $T_{kf} = 80°C$.

On note :

- λ la conductivité du grès (matériau constitutif de la tasse)
- h le coefficient de transfert conducto-convectif : le transfert thermique conducto-convectif entre la paroi extérieure de la tasse et l'air vérifie la loi de Newton $\phi = hS(T_{solide} - T_{fluide})$
- la température de la pièce est $T_{ext} = 20°C$
- On négligera les effets de bord.

Quelle doit être l'épaisseur e de la tasse si l'on veut pouvoir la prendre sans se brûler les doigts ?

Données :

- $a = 0{,}05$ m
- $\lambda = 1$ W.m^{-1}.K^{-1}
- $h = 500$ W.m^{-2}.K^{-1}
- La brûlure survient si l'objet à saisir a une température supérieure à $T_{max} = 50°C$

On calcule le flux thermique à travers un cylindre dans la tasse, de rayon r tel que $a < r < a + e$ et de hauteur H : $\Phi = \iint_{\substack{surface\ latérale \\ cylindre\ rayonr}} \vec{j_Q}.d\vec{S} = j_Q(r).2\pi rH$

On suppose le régime quasi-stationnaire : il y a conservation du flux, il est indépendant de r.

Avec la loi de Fourier : $\Phi = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi rH$ => $dT = -\frac{\Phi dr}{2\pi\lambda H}$

On intègre en $r = a$ où $T = T_{kf}$ et $r = a + e$ où $T = T_{max}$: $T_{max} - T_{kf} = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda} Ln\frac{a+e}{a}$

Le même flux traverse en surface, on a alors : $\phi = h2\pi(a + e)H(T_{max} - T_{ext})$

Donc : $T_{max} - T_{kf} = -\frac{h2\pi(a+e)H(T_{max}-T_{ext})}{2\pi\lambda H} Ln\frac{a+e}{a}$

$$T_{max} - T_{kf} = \frac{h(a+e)(T_{ext}-T_{max})}{\lambda} Ln(1 + \frac{e}{a})$$

Pour trouver e on va supposer $e << a$: $T_{max} - T_{kf} = a(1 + \frac{e}{a}) \frac{h(T_{ext}-T_{max})}{\lambda} \frac{e}{a}$

$$T_{max} - T_{kf} \approx a \frac{h(T_{ext}-T_{max})}{\lambda} \frac{e}{a}$$

D'où : $\boxed{e = \frac{\lambda(T_{max}-T_{kf})}{h(T_{ext}-T_{max})}}$

A.N : $\underline{e = 2 \text{ mm}}$
