
INTÉGRATION

Épreuves orales

1 CCINP MP (exercice 28)

1. La fonction $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2 - 4}}$ est-elle intégrable sur $]2, +\infty[$?
2. Soit a un réel strictement positif.
La fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{1 + x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

2 Mines-Télécom

Déterminer la partie entière de $\sum_{k=1}^{10^4} \frac{1}{\sqrt{k}}$. (On pourra utiliser une comparaison série-intégrale.)

3 CCINP

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n}$ converge.
2. À l'aide d'un changement de variable, calculer cette intégrale.

4 CCINP

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt$ converge.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^n \frac{\arctan(t)}{1+t} dt$.
Trouver un équivalent de u_n en $+\infty$.

5 CCINP

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx$ converge.
2. On pose $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx$ pour tout $n \geq 2$.
Déterminer la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

6 TPE

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.
2. Montrer que $\int_0^1 e^t \ln t dt = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot n!}$.

7 Mines-Télécom

On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Montrer que $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{-2\ln t}} = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ en posant $x = \sqrt{-\ln t}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Poser le changement de variable $x = (\cos t)^n$ dans l'intégrale $w_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt$.
3. Montrer que la suite de fonctions de terme général $f_n : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{n(t^{-2/n} - 1)}}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{-2\ln t}}$ sur $]0, 1[$ et en déduire, grâce au théorème de convergence dominée, que $w_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

8 CCINP MP (exercice 26)

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$.

1. Justifier que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. (a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
(b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. La série $\sum (-1)^n I_n$ est-elle convergente ?
4. Établir une relation entre I_{n+1} et I_n et en déduire I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

9 Mines-Ponts (Intégrale de Gauss)

Soit f définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}_+ et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
3. En déduire $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.

10 Centrale

Éléments de correction : CCINP MP (exercice 30)

On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $I_p = \int_0^{+\infty} t^{2p} e^{-t^2} dt$ est bien définie et la calculer.
2. Donner la nature de $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p)!} I_p$.
3. Calculer $\int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t^2} dt$ de deux manières différentes.

11 Mines-Télécom, CCINP MP (exercice 50)

On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t} dt$.

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Prouver que $x \mapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite. En déduire un équivalent au voisinage de $+\infty$ de $F(x)$.

12 CCINP

1. Montrer que $g : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et déterminer sa dérivée.

2. Soit $f(x, y) = \exp(x^2 - y^2)$ et $F(x) = \int_0^x f(x, t) dt$.

(a) Exprimer F en fonction de g .

(b) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x, x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

3. Dans cette question, f désigne une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 à valeurs réelles.

Montrer que $\varphi : (x, y) \mapsto \int_0^y f(x, t) dt$ admet des dérivées partielles et les expliciter.

13 CCINP, Centrale

On note $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt$.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ln(2)$.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que ses variations.

14 Centrale

On étudie l'intégrale $f(x) = \int_{1/x}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f .
2. Étudier f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudier les variations de f .

15 Centrale

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{n!} \int_0^n e^{-t} t^n dt$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

16 CCINP

1. (a) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ converge pour $\alpha > 1$.
 (b) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$ converge.
 (c) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge (on pourra faire une intégration par parties).
 Dans la suite, on note $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)} dt$.
 (a) Montrer que φ est bien définie sur \mathbb{R} .
 (b) Montrer que φ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et exprimer $\varphi'(x)$ sous forme d'une intégrale.
 (c) Calculer $\varphi'(0)$.
3. On admet que φ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) dt$ où
 $f : (x, t) \mapsto \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}$.
 (a) Calculer $\varphi''(x) - \varphi(x)$ en fonction de I pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
 (b) En déduire $\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 (c) Étudier la limite de φ' en $+\infty$ et en déduire la valeur de I .

17 Centrale, CCINP

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f .
2. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur D .
3. Montrer que pour tout $x \in D$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$.
4. Montrer que pour tout $x \in D \cap]0, +\infty[$ et $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_1^{N+1} \frac{x}{x^2 + y^2} dy \leq \sum_{n=1}^N \frac{x}{x^2 + n^2} \leq \int_0^N \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

18 Centrale

Soit f une fonction positive, continue et décroissante de $]0, 1]$ dans \mathbb{R} . On pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Montrer que l'intégrale $\int_0^1 f$ converge si et seulement si la suite (S_n) converge et dans ce cas, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 f$.

19 Mines-Ponts

Pour $P \in \mathbb{C}[X]$ et $k \in \mathbb{Z}$, on pose $c_k(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(e^{it}) e^{-ikt} dt$.

1. Exprimer les $c_k(P)$ en fonction des coefficients de P .
2. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}$.

20 ESPCI

Pour $x \geq 0$, on pose $I(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \cos \theta) d\theta$.

1. Montrer que $I(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(x^{-1/2})$.
2. Écrire $I(x)$ sous la forme d'une somme de série.

21 ENS

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, $f \in E$, $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de E .

1. On suppose que $\int_0^1 f_n^2 \rightarrow \int_0^1 f^2$ et que, pour tout $g \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, $\int_0^1 f_n g \rightarrow \int_0^1 f g$.
Montrer que $\int_0^1 (f_n - f)^2 \rightarrow 0$.
2. On suppose que $\int_0^1 |f_n| \rightarrow \int_0^1 |f|$ et que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers f sur $[0, 1]$.
Montrer que $\int_0^1 |f_n - f| \rightarrow 0$.

22 Mines-Ponts

Déterminer les fonctions f continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + 2 \int_0^x f(t) \cos(x-t) dt.$$