

# Intégration - Applications linéaires - séries

## DS9

Durée : 3h

**Piste verte** : faire les exercices dans l'ordre.**Piste bleue** : 2 -> 3 -> 1 -> 4 -> 5**Piste Noire** : 2 -> 3 -> 4 -> 5 -> 1

### Exercice 1 : échauffement

1. Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants (on ne demande pas leur somme)

- a)  $u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$   
 b)  $v_n = \frac{\cos(n) + \sin(n)}{n^2}$   
 c)  $w_n = \frac{\ln(n)}{n^3}$

2. Soit l'application  $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$  définie par  $\varphi : P \mapsto (X+1)P' + 3P$ . On ne demande pas de montrer que  $\varphi$  est bien un endomorphisme.

- a) Donnez la matrice de  $\varphi$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ .  
 b) Justifiez que  $\varphi$  est un automorphisme.

1. a) Remarquons déjà que pour tout  $n \geq 1$ ,  $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1 \leq \frac{\pi}{2}$ , donc  $u_n \geq 0$ .

Comme  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ , on en déduit  $u_n \sim \frac{1}{n}$ , qui est le terme général d'une série divergente (série harmonique), donc par critère d'équivalence des SATP,  $\sum u_n$  diverge.

b) On commence par dire que  $|\cos(n) + \sin(n)| \leq 2$  par l'inégalité triangulaire.

Ainsi  $|v_n| \leq \frac{2}{n^2}$ . La série  $\sum \frac{1}{n^2}$  est convergente (Riemann avec  $\alpha = 2 > 1$ , et donc par critère de comparaison des SATP, la série  $\sum |v_n|$  converge, et donc  $\sum v_n$  est absolument convergente, donc convergente.

c) comme  $n^2 w_n = \frac{\ln(n)}{n^3} \rightarrow 0$  par croissance comparée, on en déduit que  $w_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . La série  $\sum \frac{1}{n^2}$  est convergente (Riemann avec  $\alpha = 2 > 1$ , et donc par critère de domination des SATP, la série  $\sum w_n$  converge

2. a) On calcule les images des polynômes de la base canonique :

$\varphi(1) = 3$ ,  $\varphi(X) = 4X + 1$  et  $\varphi(X^2) = 5X^2 + 2X$ , ce qui donne la matrice suivante :

$$\text{Mat}_{\text{can}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

b) La matrice est triangulaire supérieure, sans 0 sur la diagonale (ou alors : de déterminant  $60 \neq 0$ ) donc elle est inversible.

Ainsi,  $\varphi$  est bijective, donc est un automorphisme.

\*

### Exercice 2 :

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  l'application linéaire canoniquement associée canoniquement à  $A$ .

- Déterminez une base de  $\text{Ker}(f - id)$  et une base de  $\text{Ker}(f - 2id)$ .
- Montrez que  $\text{Ker}(f - id)$  et  $\text{Ker}(f - 2id)$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .
- En déduire une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale.
- Décrire la technique permettant, à partir de la question 2, de calculer  $A^n$  (on n'effectuera pas les calculs explicitement, mais on décrira précisément chaque étape en justifiant pourquoi cela fonctionne.)

1.  $f - id$  a pour matrice  $B = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

On cherche donc  $\text{Ker}B$  et on résout  $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ce qui donne le système

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x + y = 0 \\ y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

D'où  $\text{Ker}B = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ , c'est à dire  $\text{Ker}f - id = \text{vect}((1, 1, 1))$

On procède de même pour  $\text{Ker}f - 2Id$  et on trouve

$$\text{Ker}f - 2Id = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$$

2. On pose  $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1))$ . Cette famille est de cardinal  $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ , et si  $\lambda(1, 1, 1) + \mu(1, 1, 0) + \eta(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$ , la résolution du système donne  $\lambda = \mu = \eta = 0$ , autrement dit la famille est libre.

C'est donc une base de  $\mathbb{R}^3$ .

La juxtaposition des bases est une base, donc  $\text{Ker}(f - id) \oplus \text{Ker}(f - 2id) = E$ .

3. Dans la question 1, on a montré que  $(1, 1, 1) \in \text{Ker}f - id$ , donc  $f((1, 1, 1)) = (1, 1, 1)$ .

De même,  $f((1, 1, 0)) = 2(1, 1, 0)$  et  $f((0, 1, 1)) = 2(0, 1, 1)$ . Ainsi, dans la base  $\mathcal{B}$ ,

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

Il s'agit bien d'une matrice diagonale.

4. En posant  $P$  la matrice de passage de la base canonique  $\mathcal{B}$ , on a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice  $P$  est inversible (puisque  $\mathcal{B}$  est une base) et d'après la formule de changement de base, on a

$$A = PDP^{-1}$$

On montre par récurrence que  $A^n = PD^nP^{-1}$ . On calcule  $P^{-1}$  via la méthode du miroir, et

comme  $D$  est diagonale, on a  $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

On calcule enfin le produit matricielle pour en déduire  $A^n$ .

### Exercice 3 :

Soit  $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4+t^2}} dt$

1. Déterminez l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Étudiez la parité de  $f$ .
3. a) Montrez que pour tout  $t > 0$ ,

$$\frac{1}{t+2} \leq \frac{1}{\sqrt{4+t^2}} \leq \frac{1}{t}$$

- b) en déduire un encadrement de  $f(x)$  pour tout  $x > 0$ .
- c) Montrez que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln(2)$ . Que dire de  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ?

4. Justifiez que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur son ensemble de définition et calculez  $f'$ .

5. On rappelle que  $(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$

Déterminez le développement limité de  $f$  à l'ordre 5 en 0. (attention, question calculatoire : le terme d'ordre 5 est moche ;-)

1. Soit  $g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{4+t^2}}$ .  $g$  est une fonction définie et continue sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g$  est continue sur  $[x, 2x]$  (si  $x \geq 0$ ) ou  $[2x, x]$  (si  $x \leq 0$ ) et donc  $\int_x^{2x} g(t)dt$  existe. La fonction  $f$  est donc définie sur  $\mathbb{R}$ .

2.  $f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{4+t^2}} dt$ . On effectue le changement de variable de classe  $\mathcal{C}^1$   $u = -t$  (donc  $du = -dt$ ) ce qui donne

$$f(-x) = - \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4+(-u)^2}} du = - \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4+(u)^2}} du = -f(x)$$

Ainsi,  $f$  est impaire.

3. a) pour tout  $t > 0$ ,  $2t > 0$ , donc  $4+t^2 < 4+2t+t^2 = (2+t)^2$  et  $4+t^2 > t^2$ . En prenant la racine dans ces inégalités (car  $\sqrt{\cdot}$  est croissante), on obtient

$$|t| \leq \sqrt{4+t^2} \leq |t+2|$$

Par positivité de  $t$ , on peut enlever les valeurs absolues, et par passage à l'inverse, il vient :

$$\frac{1}{t+2} \leq \frac{1}{\sqrt{4+t^2}} \leq \frac{1}{t}$$

b) Pour  $x > 0$ ,  $2x > x$  et par positivité de l'intégrale, on en déduit :

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t+2} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4+t^2}} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$$

d'où

$$[\ln(t+2)]_x^{2x} \leq f(x) \leq [\ln(t)]_x^{2x}$$

c'est à dire

$$\ln\left(\frac{2x+2}{x+2}\right) \leq f(x) \leq \ln\left(\frac{2x}{x}\right) = \ln(2)$$

c) Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+2}{x+2} = 2$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2x+2}{x+2}\right) = \ln(2)$  et par le théorème d'encadrement, on en déduit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln(2)$$

Par imparité, on a enfin  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\ln(2)$ .

4. Posons  $G$  une primitive de la fonction  $g$  que nous avons définie à la question 1. Alors  $G$  est une fonction dérivable, à dérivée de classe  $\mathcal{C}^\infty$  (puisque  $g$  l'est par composition de fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ), donc  $G$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

Le théorème fondamental du calcul intégral donne  $f(x) = G(2x) - G(x)$ , et donc par somme et composition de fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

On a alors  $f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x)$

$$f'(x) = 2 \frac{1}{\sqrt{4+4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$$

5. On a  $f'(x) = 2(4+4x^2)^{-\frac{1}{2}} - (4+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ .

On va utiliser  $(1+x)^{-\frac{1}{2}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$

Remarquons déjà, en factorisant par 4 dans chacun des termes, que

$$f'(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

comme  $x^2$  et  $\left(\frac{x}{2}\right)^2$  tendent vers 0 quand  $x \rightarrow 0$ , on peut substituer dans le DL et on a

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)$$

$$\left(1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8} \frac{1}{16}(x^2)^2 + o((x^2)^2) = 1 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{8 \times 16}x^4 + o(x^4)$$

et

$$\text{D'où } f'(x) = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{16}\right)x^2 + \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{16 \times 16}\right)x^4 + o(x^4) = \frac{1}{2} - \frac{7}{16}x^2 + \frac{93}{16 \times 16}x^4 + o(x^4)$$

Comme  $f(0) = 0$ , on conclut en primitivant le DL ce qui donne :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{7}{48}x^3 + \frac{93}{5 \times 128}x^5 + o(x^5)$$

### Exercice 4 :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \int_0^1 \frac{x}{n(x+n)} dx$

1. Calculez  $u_1$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , et soit  $f_n$  la fonction définie sur  $[0, 1]$  par  $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$

- a) Etudiez les variations de  $f_n$  sur  $[0, 1]$
- b) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$$

- c) Conclure que la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge.

3. Soit  $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ .

On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ .

- a) Justifiez que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$S_n \leq \gamma.$$

- b) Déterminez  $a$  et  $b$  réels tels que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $x \in [0; 1]$ , on a

$$\frac{x}{k(x+k)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{x+k}$$

- c) Montrez que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$u_k = \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)$$

- d) En déduire que

$$S_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) - \ln(n+1)$$

4. On pose maintenant

$$T_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$$

- a) Montrez que  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente et précisez sa limite.
- b) Montrez que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

et en déduire que la suite  $(T_n)$  est décroissante.

- c) Déterminez, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  un encadrement de  $\gamma$  à l'aide de  $T_n$  et  $S_n$ .

1. Un petit banquier et c'est tout bon :

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1} dx \\ &= \int_0^1 1 - \frac{1}{1+x} dx \\ &= [x - \ln(|x+1|)]_0^1 \\ u_1 &= 1 - \ln(2) \end{aligned}$$

2. a)  $f_n$  est définie et dérivable sur  $[0, 1]$  par quotient de fonction dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur  $[0, 1]$ .

On obtient  $f'_n(x) = \frac{n}{(x+n)^2}$  donc  $f_n(x) \geq 0$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .

Ainsi,  $f_n$  est croissante sur  $[0, 1]$ .

- b) Comme  $f_n$  est croissante sur  $[0, 1]$ , elle est majorée par  $f_n(1) = \frac{1}{n+1}$   
on en déduit que, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$0 \leq \frac{x}{n(x+n)} \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

Comme  $0 \leq 1$ , on peut utiliser la croissance de l'intégrale pour en déduire

$$0 \leq u_n \leq \int_0^1 \frac{1}{n(n+1)} dx = \frac{1}{n(n+1)}$$

Enfin,  $n(n+1) \geq n^2$ , d'où

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$$

- c)  $u_n$  est positive pour tout  $n \geq 1$  et  $u_n \leq \frac{1}{n^2}$ .

Or  $\sum \frac{1}{n^2}$  est une série convergente, donc, par critère de comparaison des SATP,

$$\sum u_n \text{ est convergente.}$$

3. a)  $S_n$  est la somme partielle de la série  $\sum u_n$ , et comme  $u_n \geq 0$ ,  $S_n$  est croissante.

On sait qu'elle converge vers  $\gamma$  et donc par le théorème de convergence monotone,  $\gamma$  est la borne supérieure de  $S_n$ , donc pour tout  $n \geq 1$ ,

$$S_n \leq \gamma$$

- b) C'est une décomposition en éléments simples un peu perturbante, puisqu'elle porte sur  $k$  et pas sur  $x$ .

Quelle que soit la méthode utilisée (mise au même dénominateur ou multiplication astucieuse), on trouve  $a = 1$  et  $b = -1$ , c'est à dire

$$\frac{x}{k(x+k)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}$$

- c) Il suffit d'intégrer le résultat précédent :

$$\begin{aligned} u_k &= \int_0^1 \frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{k} dx - \int_0^1 \frac{1}{x+k} dx \\ &= \frac{1}{k} - [\ln(|x+k|)]_0^1 \end{aligned}$$

d'où  $u_k = \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)$

- d) Il reste à remplacer et conclure par télescopage :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \ln(k) - \ln(k+1) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln(1) - \ln(n+1) \\
S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)
\end{aligned}$$

4. a) On sait que  $S_n$  converge, et  $T_n$  n'en est pas très loin, d'où l'idée d'utiliser un banquier pour se ramener à  $S_n$  :

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) + \ln(n+1) - \ln(n+1) \\
&= S_n + \ln(n+1) - \ln(n)T_n &= S_n + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Comme  $\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$ , alors  $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \rightarrow 0$ , et comme  $S_n$  converge  $\gamma$ , par somme de limite,

$$\boxed{T_n \text{ converge et } \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \gamma}$$

- b) Comme  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $x \in [n, n+1]$ , on a

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$$

Comme  $n+1 \geq n$ , par croissance de l'intégrale il vient

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx$$

d'où on déduit que

$$\frac{1}{n+1}(n+1-n) \leq \ln(|x|)]_n^{n+1} \leq \frac{1}{n}(n+1-n)$$

soit finalement

$$\boxed{\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}}$$

De plus,  $T_{n+1} - T_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$

D'après l'encadrement qu'on vient d'obtenir, on en déduit  $(T_n)$  décroissante.

- c)  $T_n$  est décroissante et converge vers  $\gamma$ , donc  $\gamma \leq T_n$ . La question 3a) donne l'autre morceau et on a donc

$$\boxed{S_n \leq \gamma \leq T_n}$$



## Exercice 5 :

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $a \in \mathbb{R}_+$ . On pose

$$I_n(a) = \int_0^a e^{-nx} \ln(n+x) dx$$

1. Montrez que si  $a \leq b$ , alors  $I_n(a) \leq I_n(b)$ .
2. Montrez que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}^*, \ln n \leq \ln(n+x) \leq \ln(n) + \frac{x}{n}$$

3. Montrez que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\frac{\ln(n)}{n}(1 - e^{-na}) \leq I_n(a) \leq \frac{\ln(n)}{n}(1 - e^{-na}) - \frac{a}{n^2}e^{-na} + \frac{1}{n^3}(1 - e^{-na})$$

4. En déduire que pour tout  $a \in \mathbb{R}_+$ ,

$$I_n(a) \leq \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n^3}$$

Puis que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{a \rightarrow +\infty} I_n(a)$  existe.

5. On note  $J_n$  la limite précédente. Montrez que  $J_n \sim \frac{\ln(n)}{n}$  (quand  $n \rightarrow +\infty$ )

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $n+x \geq x$ , et comme  $\ln$  est une fonction croissante, on a immédiatement

$$\ln n \leq \ln(n+x)$$

D'autre part,  $\ln(n+x) = \ln(n(1 + \frac{x}{n})) = \ln(n) + \ln(\frac{x}{n})$ .

Enfin  $x \mapsto \ln(1+x)$  est une fonction concave (dérivée seconde négative), donc la courbe de  $f$  est en dessous de ses tangentes. La tangente en 0 a pour équation  $y = x$ , ce qui donne, pour tout  $x \in ]-1, +\infty[$ ,

$$\ln(1+x) \leq x$$

Comme  $\frac{x}{n} \in \mathbb{R}_+ \subset ]-1, +\infty[$ , on en déduit

$$\ln(1 + \frac{x}{n}) \leq \frac{x}{n}$$

d'où finalement

$$\ln(n+x) \leq \ln(n) + \frac{x}{n}$$

2. Pour  $b \geq a$ , on a, par Chasles

$$I_n(b) = \int_0^b e^{-nx} \ln(n+x) dx = \int_0^a e^{-nx} \ln(n+x) dx + \int_a^b e^{-nx} \ln(n+x) dx = I_n(a) + \int_a^b e^{-nx} \ln(n+x) dx$$

Or pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $e^{-nx} \ln(n+x) \geq 0$ , donc  $\int_a^b e^{-nx} \ln(n+x) dx \geq 0$

Ainsi,  $I_n(b) \geq I_n(a)$ , et donc  $I_n(a)$  est croissante.

De plus, d'après l'inégalité obtenue à la question 1 et par croissance de l'intégrale, on a

$$\int_0^a e^{-nx} \ln(n) dx \leq I_n(a) \leq \int_0^a e^{-nx} \ln(n) dx + \int_0^a e^{-nx} \frac{x}{n} dx$$

$$\text{Or } \int_0^a e^{-nx} \ln(n) dx = \ln(n) \left[ \frac{-1}{n} e^{-nx} \right]_0^a = \frac{\ln(n)}{n} (1 - e^{-na})$$

Et par intégration par partie :

$$\int_0^a x e^{-nx} dx = \left[ -\frac{x}{n} e^{-nx} \right]_0^a + \frac{1}{n} \int_0^a e^{-nx} dx = -\frac{a}{n} e^{-na} + \frac{1}{n^2} (1 - e^{-na})$$

On obtient donc l'encadrement :

$$\frac{\ln n}{n} (1 - e^{-na}) \leq I_n(a) \leq \frac{\ln n}{n} (1 - e^{-na}) - \frac{a}{n^2} e^{-na} + \frac{1}{n^3} (1 - e^{-na})$$

On en déduit donc, comme  $(1 - e^{-na}) \leq 1$  et  $-\frac{a}{n^2} e^{-na} \leq 0$  que

$$I_n(a) \leq \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n^3}$$

Ainsi, la fonction  $a \rightarrow I_n(a)$  est croissante et majorée, donc elle converge vers une limite  $J_n$ .

3. En reprenant l'encadrement obtenu à la fin de la question précédente et en passant à la limite quand  $a \rightarrow +\infty$ , on obtient, par croissance comparée, que

$$\frac{\ln n}{n} \leq J_n \leq \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n^3}$$

En multipliant par  $\frac{n}{\ln n}$  on obtient par encadrement que  $\lim \frac{n}{\ln(n)} J_n = 1$ , c'est à dire  $J_n \sim \frac{\ln n}{n}$