ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES, DÉNOMBREMENT, ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Épreuves orales

I. Équations différentielles

1 *CCINP*

On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ xy'' + 2y' - xy = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Donner le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = \dfrac{1}{(2n+1)!}$ et $a_{2n+1} = 0$.
   Pour $x \in]-R, R[$, exprimer $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ à l'aide de fonctions usuelles.
2. On donne une suite (b_n) telle que $\sum b_n x^n$ a un rayon de convergence $R' > 0$.
   Montrer que $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ est une solution de (E) sur $]-R', R'[$ vérifiant $g(0) = 1$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_n$.
3. Montrer qu'une fonction y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ est solution de (E) si et seulement si z', où $z : x \mapsto \dfrac{y(x)}{f(x)}$, est solution d'une équation différentielle du premier ordre que l'on résoudra.
4. Donner l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

2 *CCINP*

Soit (E) l'équation différentielle $2(x - x^2)y''(x) + (x-2)y'(x) - y(x) = 0$.

1. Montrer que $y_0 : x \mapsto x - 2$ est solution.
2. Soit I l'intervalle $]1, 2[$ ou $]2, +\infty[$.
   Montrer que y est solution de (E) sur I si et seulement si $z : x \mapsto \dfrac{y(x)}{x-2}$ est solution d'une certaine équation différentielle d'ordre 2 que l'on explicitera.
3. (a) On pose $\varphi : x \mapsto -2\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2}$. Montrer que φ est dérivable sur I et calculer φ'.
   (b) Résoudre (E) sur I sachant que $\dfrac{4-3x^2}{2x(x-1)(x-2)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2(x-1)} - \dfrac{2}{x-2}$.
   (c) Résoudre (E) sur $]1, +\infty[$.

3 *Mines-Ponts*

Trouver les solutions développables en série entière de l'équation $xy'' - (x+3)y' + 3y = 0$ vérifiant $y(0) = 1$.

4 *Mines-Télécom* et *Mines-Ponts*

Résoudre les systèmes différentiels $(S_1) : \begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - y \end{cases}$ et $(S_2) : \begin{cases} x' = 2x - z + te^t \\ y' = 2y - 4z + e^t \\ z' = x - y + t^2 e^t \end{cases}$

$\boxed{5}$ *Centrale*

Soit f une fonction continue et intégrable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.
On considère l'équation différentielle (E) $y'' + f(x)y = 0$ et on note $\mathscr{S}$ son ensemble solution.

1. Montrer que si y est une solution bornée de (E) alors yf est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire la limite de y' en $+\infty$.

2. On admet que l'application $y \mapsto \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de $\mathscr{S}$ sur $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

   Montrer que si y_1 et y_2 sont deux solutions de (E) alors $W : x \mapsto \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ est constante et en déduire que l'équation différentielle admet des solutions non bornées.

$\boxed{6}$ *ESPCI*

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f_1, \ldots, f_n$ des éléments de $\mathscr{C}^{n-1}(I, \mathbb{R})$.
On note

$$W_n(f_1, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

1. On suppose qu'il existe des réels non tous nuls $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que, pour tout $t \in I$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t) = 0$.

   Que vaut $W_n(f_1, \ldots, f_n)$?

2. On suppose que $W_n(f_1, \ldots, f_n)$ est la fonction nulle et que $W_{n-1}(f_1, \ldots, f_{n-1})$ ne s'annule pas sur I.

   Montrer qu'il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ tels que $f_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_i$.

   Précision : On admettra que si $a_0, \ldots, a_{n-2}$ sont des fonctions continues sur I alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y^{(n-1)} + a_{n-2}(t) y^{(n-2)} + \cdots + a_1(t) y' + a_0(t) y = 0$ est un espace vectoriel de dimension $n - 1$.

II. Fonctions de plusieurs variables

$\boxed{7}$ *CCINP*

1. Déterminer les extremums sur $\mathbb{R}^2$ de f définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$.

2. Déterminer les extremums sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ de g définie par $g(x, y) = x \ln y - y \ln x$.

$\boxed{8}$ *CCINP*

Soit n un entier strictement positif, $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, u un vecteur fixé de E, A une matrice symétrique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et φ l'endomorphisme de E de matrice A dans la base canonique.
On étudie la fonction f de E qui à tout vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ associe $f(x) = \langle x, \varphi(x) \rangle - 2\langle x, u \rangle$.

1. Ici, $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $u = (5, 1)$.

   (a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 - 10x_1 - 2x_2$.
   Montrer que $x_0 = (2, 1)$ est un point critique de f.

   (b) Montrer que f admet un extremum en x_0.

2. On revient au cas général et on suppose de plus que pour tout x non nul de E, $\langle x, \varphi(x)\rangle > 0$.
   (a) Montrer que les valeurs propres de φ sont strictement positives.
   (b) En utilisant une base orthonormée de vecteurs propres de φ, montrer que f possède un extremum que l'on précisera.

$\boxed{9}$ *CCINP*

On pose $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{ch}(2x) - \cos(2y)}{2}$.

1. Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, $\sin t \leqslant t$ et $\mathrm{sh} t \geqslant t$.
2. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \mathrm{sh}^2 x + \sin^2 y$.
   En déduire le signe de f.
3. Montrer que 0 est le minimum de f sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.
4. Montrer que D est fermé, borné et que f admet un maximum sur D.
5. Montrer que $D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 < 1\}$ est un ouvert et déterminer les points critiques de f sur D'.
6. En déduire qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $(x,y) \in D$, $f(x,y) \leqslant f(\cos t_0, \sin t_0)$.
7. Montrer que $g : t \mapsto f(\cos t, \sin t)$ est décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et en déduire le maximum de f sur D.

$\boxed{10}$ *Mines-Ponts*

On étudie $f : (x,y) \mapsto x^2 y(x + y - 4)$ sur $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 6\}$.

1. Tracer Δ.
2. Trouver tous les extrema locaux et globaux de f sur Δ.

$\boxed{11}$ *CCINP*

On pose pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f(0,0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

$\boxed{12}$ *Mines Télécom*

1. Résoudre l'équation différentielle $(1+t^2)y' + 2ty = 0$.
2. Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par $f(x,y) = g\left(\dfrac{y}{x}\right)$ avec g de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.
   (b) Déterminer les fonctions f de la forme ci-dessus telles que $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

$\boxed{13}$ *CCINP*

Soit $F \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Pour $(A, B) \in (\mathbb{R}^2)^2$ tel que $A = (x, y)$ et $B = (x', y')$, on définit la fonction f_{AB} par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_{AB}(t) = F(tA + (1-t)B) = F(tx + (1-t)x', ty + (1-t)y').$$

On dit que F est *convexe* lorsque pour tout $(A, B) \in (\mathbb{R}^2)^2$, f_{AB} est convexe.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction φ de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ soit convexe.
2. Soit F la fonction définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x, y) = x^2 + y^2$.
   Montrer que F est convexe.
3. Pour tout $M \in \mathbb{R}^2$, on définit la fonction g_M par :
   $$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ g_M(u, v) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M)u^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(M)uv + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(M)v^2.$$
   Montrer que pour tout $(A, B) \in (\mathbb{R}^2)^2$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f''_{AB}(t) = g_{tA+(1-t)B}(A - B)$.
4. Montrer que F est convexe si et seulement si $\forall M \in \mathbb{R}^2,\ \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ g_M(u, v) \geqslant 0$.
5. Montrer que F est convexe si et seulement si pour tout $M \in \mathbb{R}^2$, la matrice hessienne de F au point M appartient à $\mathscr{S}_2^+(\mathbb{R})$.

$\boxed{14}$ *Centrale*

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est α-positivement homogène s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \forall \lambda > 0,\ \ f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^\alpha f(x, y, z).$$

Montrer que f est α-positivement homogène si et seulement si :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \ x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + z\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \alpha f(x, y, z).$$

III. Dénombrement

$\boxed{15}$ *Mines-Ponts*

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On choisit au hasard $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, n-1]\!]$.

Quelle est la probabilité que f soit surjective ?

$\boxed{16}$ *Centrale*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on appelle *nombre de Stirling* $S_{n,k}$ le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k sous-ensembles.

On pose $S_{0,0} = 1$ et $S_{n,0} = S_{0,n} = 0$.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant k} \frac{S_{n,k}}{n!}x^n$ vaut $+\infty$.

   On note A_k sa somme.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Donner une relation entre A'_k, A_k, k et A_{k-1}.
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A_k(x) = \dfrac{(e^x - 1)^k}{k!}$.

IV. Espaces vectoriels normés

17 *Centrale*

Pour tout polynôme réel P et pour tout entier n, on pose $a_n(P) = \int_0^1 P(t)t^n \mathrm{d}t$.
Pour tout polynôme réel P, on pose :

$$\|P\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|,\ N_\infty(P) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n(P)|,\ N_2(P) = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(P)^2}.$$

1. Justifier que ces quantités sont bien définies.
2. Montrer que $\|.\|_\infty$, N_∞ et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
3. Trouver des constantes α et β strictement positives telles que :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ N_\infty(P) \leqslant \alpha N_2(P) \ \text{ et } \ N_2(P) \leqslant \beta \|P\|_\infty.$$

4. Montrer que ces normes ne sont pas équivalentes entre elles.

18 *CCINP*

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant d}$ de $\mathscr{M}_d(\mathbb{C})$, on pose $\|M\|_\infty = \max\{|m_{i,j}|,\ 1 \leqslant i, j \leqslant d\}$.

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est-elle diagonalisable ?
2. On pose $N = A - I_3$. Calculer N^2 puis les autres puissances de N.
3. Déterminer la limite de $\|A^n\|_\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
4. Vérifier que $\|.\|_\infty$ est une norme sur $\mathscr{M}_d(\mathbb{C})$.
5. Pour tout couple (M, N) de matrices de $\mathscr{M}_d(\mathbb{C})$, prouver la majoration :

$$\|MN\|_\infty \leqslant d \times \|M\|_\infty \times \|N\|_\infty.$$

6. On suppose que M est diagonalisable et possède au moins une valeur propre de module strictement supérieur à 1.
   Déterminer la limite de $\|M^n\|_\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

19 *ENS*

Soit E l'espace des fonctions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que $f(0) = 0$.
Pour tout $f \in E$, on pose $\|f\| = \|f + f'\|_\infty$.

1. Montrer que $\|.\|$ est une norme sur E.
2. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leqslant a\|f\|$.
3. Les normes $\|.\|$ et $\|.\|_\infty$ sont-elles équivalentes sur E ?