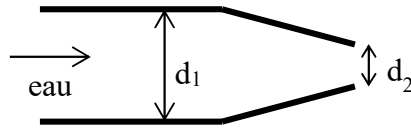


#### 4.8 Bilans macroscopiques-Exercice 8

---

Une lance à incendie a un diamètre intérieur  $d_1 = 32$  mm. Elle se termine par un embout conique dont le diamètre minimal est  $d_2 = 14$  mm. La pression extérieure vaut  $P_0 = 1$  bar.

L'eau de masse volumique  $\mu$  est en écoulement stationnaire avec un débit volumique  $q_v = 3$  L.s<sup>-1</sup>.



a-Déterminer la vitesse de sortie et la pression dans la lance.

b-Par un bilan de quantité de mouvement, déterminer la force horizontale que le pompier doit exercer pour qu'elle ne se déplace pas.

---

#### 4.8 Bilans macroscopiques-Exercice 8

a-Liquide => Ecoulement incompressible => Conservation du débit volumique =>  $q_v = v_1 \pi \frac{d_1^2}{4} = v_2 \pi \frac{d_2^2}{4}$

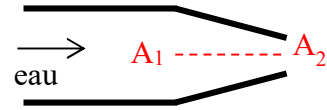
La vitesse de sortie est :  $v_2 = \frac{4q_v}{\pi d_2^2}$  A.N :  $v_2 = 19,5 \text{ m.s}^{-1}$  et  $v_1 = 3,75 \text{ m.s}^{-1}$

Ecoulement parfait, stationnaire, incompressible d'un fluide homogène.

Relation de Bernoulli sur la ligne de courant  $A_1 A_2$  :

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad \text{avec } P_2 = P_0 \text{ (jet libre)}$$

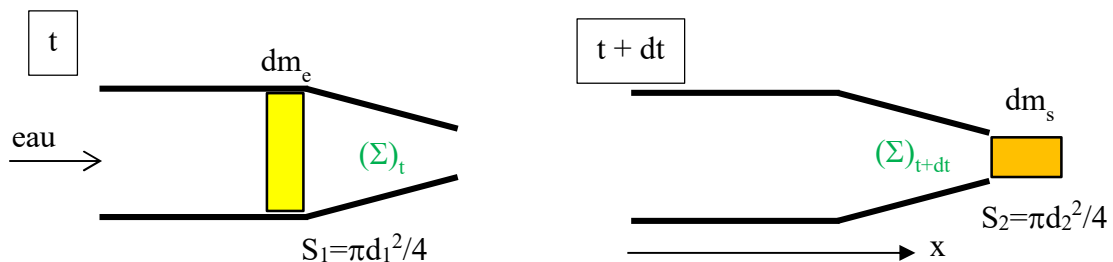
La pression dans la lance est :  $P_1 = P_0 + \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)$  A.N :  $P_1 = 2,83 \text{ bar}$



b-Pour calculer  $\vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{embout}}$ , on cherche la force opposée  $\vec{F}_{\text{embout} \rightarrow \text{eau}} = -\vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{embout}}$

Système ouvert ( $\Sigma$ ) : l'eau entre les sections  $S_1$  et  $S_2$

Système fermé ( $\Sigma^*$ ) = ( $\Sigma$ )<sub>t</sub> +  $dm_e$  = ( $\Sigma$ )<sub>t+dt</sub> +  $dm_s$  avec  $dm_e = dm_s = q_m dt = \mu q_v dt$  en régime stationnaire



Loi de la quantité de mouvement pour le système fermé ( $\Sigma^*$ ) dans le référentiel terrestre galiléen :

$$\frac{d\vec{P}_{(\Sigma^*)}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow (\Sigma^*)} = m_{(\Sigma^*)} \vec{g} + \vec{F}_{\text{embout} \rightarrow \text{eau}} + \vec{F}_{\text{pression amont} \rightarrow dm_e} + \vec{F}_{\text{pression aval} \rightarrow dm_s}$$

Le poids de l'eau constituant ( $\Sigma^*$ ) (quelques litres) sera supposé négligeable devant les autres forces.

On a :  $\frac{d\vec{P}_{(\Sigma^*)}}{dt} = \frac{\vec{P}_{(\Sigma)}(t+dt) + \vec{P}_{dm_s} - \vec{P}_{(\Sigma)}(t) - \vec{P}_{dm_e}}{dt}$  Or :  $\vec{P}_{(\Sigma)}(t+dt) = \vec{P}_{(\Sigma)}(t)$  en régime stationnaire

Il reste :  $\frac{d\vec{P}_{(\Sigma^*)}}{dt} = \frac{\vec{P}_{dm_s} - \vec{P}_{dm_e}}{dt} = \frac{dm_s \vec{v}_2 - dm_e \vec{v}_1}{dt} = q_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$

On a :  $\vec{F}_{\text{pression amont} \rightarrow dm_e} = P_1 S_1 \vec{u}_x$  et  $\vec{F}_{\text{pression aval} \rightarrow dm_s} = -P_0 S_2 \vec{u}_x$

Donc :  $q_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = -\vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{embout}} + P_1 S_1 \vec{u}_x - P_0 S_2 \vec{u}_x$

$$\vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{embout}} = [-q_m (v_2 - v_1) + P_1 S_1 - P_0 S_2] \vec{u}_x = [P_0 (S_1 - S_2) + \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) S_1 - \mu q_v (v_2 - v_1)] \vec{u}_x$$

Or  $v_1 = \frac{q_v}{S_1}$  et  $v_2 = \frac{q_v}{S_2}$  ce qui donne après simplifications :  $\vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{embout}} = [P_0 (S_1 - S_2) + \frac{1}{2} \rho q_v^2 \frac{(S_1 - S_2)^2}{S_1 S_2^2}] \vec{u}_x$

Cherchons maintenant la force que doit exercer le pompier qui tient le tuyau pour le maintenir immobile.

Equilibre de l'embout (en négligeant son poids) :  $\vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{embout}} + \vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{embout}} + \vec{F}_{\text{pompier} \rightarrow \text{embout}} = \vec{0}$

$\vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{embout}} = \iint_{\text{surface latérale de l'embout}} P_0 d\vec{S}(\vec{M})$  donc :

$$\vec{F}_{\text{pompier} \rightarrow \text{embout}} = -[P_0 (S_1 - S_2) + \frac{1}{2} \rho q_v^2 \frac{(S_1 - S_2)^2}{S_1 S_2^2}] \vec{u}_x - \iint_{\text{surface latérale de l'embout}} P_0 d\vec{S}(\vec{M})$$

On voit que la pression uniforme  $P_0$  agit sur la surface fermée  $S_1 \cup S_2 \cup S_{\text{latérale}}$  : la force résultante est nulle

$\vec{F}_{\text{pompier} \rightarrow \text{embout}} = -\frac{1}{2} \rho q_v^2 \frac{(S_1 - S_2)^2}{S_1 S_2^2} \vec{u}_x$  force vers la gauche de norme 100 N