

4.7.2 Bernoulli-Exercice 10

On dispose de la photo d'un geyser prise par un appareil situé à 60 m.
La taille du capteur est de 26,9 mm x 14,9 mm



a-Déterminer la hauteur du geyser et évaluer la vitesse de l'eau à la sortie du geyser.

b-*Un corps pur à l'équilibre sous deux phases (1) et (2) à la température T est soumis à une pression P_{eq} qui dépend de T et de la nature du corps. La chaleur latente massique du changement d'état $1 \rightarrow 2$ à la température T est donnée en fonction des volumes massiques v_1 et v_2 et de la pente de la courbe d'équilibre par*

$$\text{la relation de Clapeyron : } L_{1 \rightarrow 2}(T) = T(v_2 - v_1) \frac{dP_{eq}}{dT}$$

Appliquer la relation de Clapeyron pour exprimer la chaleur latente massique d'ébullition $L_{éb}(T)$ en fonction de T , $P_{sat}(T)$ et des volumes massiques v_e et v_{vap} , respectivement de l'eau liquide et de la vapeur d'eau.

Comparer les volumes massiques v_e et v_{vap} , puis simplifier la relation donnant $L_{éb}(T)$.

c-Soit T_0 la température d'ébullition de l'eau à la pression atmosphérique P_0 .

En supposant que la vapeur d'eau se comporte comme un gaz parfait et que, pour des températures d'ébullition comprises entre 0 °C et 200 °C, la chaleur latente massique d'ébullition $L_{éb}$ de l'eau est indépendante de la température, montrer que la pression de vapeur saturante de l'eau est décrite par la formule de Rankine :

$$\ln\left(\frac{P_{sat}(T)}{P_0}\right) = A - \frac{B}{T} \quad \text{où la température } T \text{ est exprimée en kelvin.}$$

Exprimer A et B en fonction de la chaleur latente massique $L_{éb}$ de la constante R des gaz parfaits, de la température T_0 et de la masse molaire M_{eau} de l'eau.

d-On donne : $A = 13,7$ et $B = 5120$ K. Calculer $L_{éb}$.

e-A quelle condition sur $P_{sat}(T)$ une bulle de vapeur d'eau peut-elle se former à la profondeur H au sein du fluide à la température T ? Quelle est la valeur numérique (en degrés Celsius) de la température d'ébullition $T_{éb}$ de l'eau à une profondeur $H = 22$ m dans le réservoir du geyser.

4.7.2 Bernoulli-Exercice 10

a-Théorème de Thalès : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA}$

$$\Rightarrow AB = \frac{OA}{OA'} A'B'$$

Avec : $OA = 60 \text{ m}$; $A'B' = 26,9 \text{ mm}$
 $OA' \approx 5 \text{ cm}$ (taille de l'appareil photo)

On trouve : $AB \approx 32 \text{ m}$

On suppose l'écoulement parfait, stationnaire, incompressible, homogène.
 La relation de Bernoulli pour la ligne de courant AB donne :

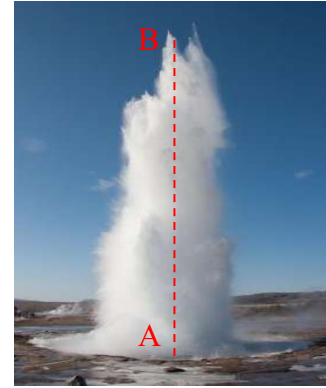
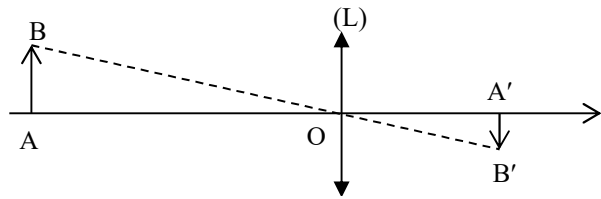
$$\frac{1}{2} \mu \vec{v}^2(A) + P(A) + \mu g z(A) = \frac{1}{2} \mu \vec{v}^2(B) + P(B) + \mu g z(B)$$

On a : $P(B) = P_0$; $P(A) = P_0$ (hypothèse du jet libre) ; $v(B) = 0$

$$\text{Il reste : } \frac{1}{2} \mu \vec{v}^2(A) = \mu g AB$$

$$\text{Donc : } \boxed{v(A) = \sqrt{2gAB}}$$

$$\text{A.N : } \underline{v(A) = 25 \text{ m.s}^{-1}}$$



b-On a : $\boxed{L_{\text{éb}}(T) = T(v_{\text{vap}} - v_e) \frac{dP_{\text{sat}}}{dT}}$ On a $v_{\text{vap}} \gg v_e$ donc il reste : $\boxed{L_{\text{éb}}(T) \approx T v_{\text{vap}} \frac{dP_{\text{sat}}}{dT}}$

c-Equation d'état du gaz parfait pour 1 kg de vapeur saturante : $P_{\text{sat}} v_{\text{vap}} = \frac{1}{M_{\text{eau}}} RT$

$$\text{Donc : } L_{\text{éb}}(T) \approx \frac{RT^2}{M_{\text{eau}} P_{\text{sat}}} \frac{dP_{\text{sat}}}{dT} \Rightarrow \frac{dP_{\text{sat}}}{P_{\text{sat}}} = \frac{L_{\text{éb}} M_{\text{eau}}}{R} \frac{dT}{T^2}$$

$$\text{On intègre entre } T_0 \text{ et } T : \ln\left(\frac{P_{\text{sat}}(T)}{P_0}\right) = \frac{L_{\text{éb}} M_{\text{eau}}}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)$$

$$\text{On a bien : } \ln\left(\frac{P_{\text{sat}}(T)}{P_0}\right) = A - \frac{B}{T} \quad \text{avec : } \boxed{A = \frac{L_{\text{éb}} M_{\text{eau}}}{RT_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{B = \frac{L_{\text{éb}} M_{\text{eau}}}{R}}$$

$$\text{d-A.N : } \underline{L_{\text{éb}} = 2,4.10^6 \text{ J.kg}^{-1}}$$

e-Apparition d'une bulle de vapeur dès que $P(H) = P_{\text{sat}}(T)$

La pression à une profondeur $H = 22 \text{ m}$ est : $P(H) = P_0 + \mu g H = 3,16.10^5 \text{ Pa}$ (loi de l'hydrostatique)

$$\text{La température d'ébullition à la profondeur } H \text{ est : } T = \frac{B}{A - \ln\left(\frac{P(H)}{P_0}\right)}$$

$$\text{A.N : } \underline{T = 408 \text{ K} = 135 \text{ }^\circ\text{C}}$$