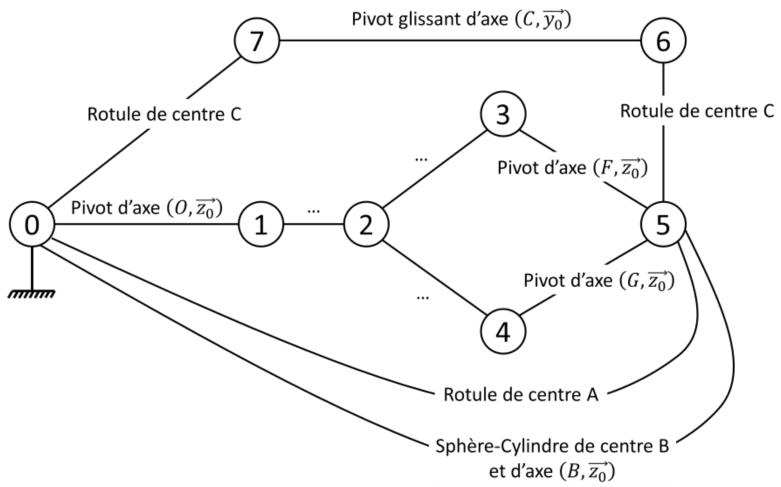
Exercice 1 : Dispositif d'entraînement de bobines

Question 1 : *Donner le graphe d'analyse du mécanisme illustré sur la figure n°2. La nature (dénomination) des liaisons entre la courroie et les poulies et entre la courroie et la bobine ne seront pas explicitées.*



Question 2 : *En vous aidant de la figure n°4 et en supposant qu'on est à la limite de l'adhérence, donner l'expression détaillée de la force élémentaire $\overrightarrow{dF_{2\to1}}$ exercée au point quelconque M de la zone de contact courroie/bobine.*

La courroie tend à entrainer la bobine avec un sens de rotation positif de la bobine par rapport au bâti. Au point de contact quelconque M, l'effort tangentiel $\overrightarrow{dF_{T,2\to1}}$ est donc dirigé suivant $+\vec{v}$.

De plus, on se place à la limite de l'adhérence, donc chaque force élémentaire $\overrightarrow{dF_{2\to1}}$ est sur le cône de frottement et ses composantes vérifient la relation :

$$\left\|\overrightarrow{dF_{T,2\to1}}\right\| = f.\left\|\overrightarrow{dF_{N,2\to1}}\right\|$$

La figure n°4 indique que le champ de pression est uniforme sur toute la surface de contact et vaut p_0.

On en déduit :

$$\overrightarrow{dF_{2\to1}} = -p_0.dS.\vec{u} + f.p_0.dS.\vec{v}$$

Question 3 : *Par intégration du modèle local, donner les expressions détaillées de $\overrightarrow{R_{2\to1}}$ et $\overrightarrow{M_O(2\to1)}$.*

<u>Résultante :</u>

$$\overrightarrow{\mathrm{R}_{2\to1}} = \iint_S \overrightarrow{dF_{2\to1}}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{R}_{2\to1}} = \iint_S -p_0.dS.\vec{u} + f.p_0.dS.\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{R}_{2\to1}} = \iint_S -p_0.R.d\theta.dz.\vec{u} + f.p_0.R.d\theta.dz.\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{R_{2\to1}} = -p_0.R.l.\int_{-\frac{\psi}{2}}^{+\frac{\psi}{2}} (\cos\theta.\overrightarrow{x_0} + \sin\theta.\overrightarrow{y_0}).d\theta + f.p_0.R.l.\int_{-\frac{\psi}{2}}^{+\frac{\psi}{2}} (-\sin\theta.\overrightarrow{x_0} + \cos\theta.\overrightarrow{y_0}).d\theta$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{R_{2\to1}} = -p_0.R.l.[\sin\theta]_{-\frac{\psi}{2}}^{+\frac{\psi}{2}}.\overrightarrow{x_0} + f.p_0.R.l.[\sin\theta]_{-\frac{\psi}{2}}^{+\frac{\psi}{2}}.\overrightarrow{y_0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{R_{2\to1}} = -2.p_0.R.l.\sin\frac{\psi}{2}.\overrightarrow{x_0} + 2.f.p_0.R.l.\sin\frac{\psi}{2}.\overrightarrow{y_0}$$

Moment en O :

D'après la géométrie du problème (symétrie du problème par rapport au plan $(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0})$), on peut déduire que $\overrightarrow{M_O}(2\to1) = M_O(2\to1).\overrightarrow{z_0}$: La courroie n'entraîne la bobine en rotation que suivant l'axe $(O,\overrightarrow{z_0})$.

$$\overrightarrow{M_O}(2\to1).\overrightarrow{z_0} = \left(\iint_S \overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{dF_{2\to1}}\right).\overrightarrow{z_0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_O}(2\to1).\overrightarrow{z_0} = \left(\iint_S (\ldots\overrightarrow{z_0} + R.\vec{u})\wedge(-p_0.dS.\vec{u} + f.p_0.dS.\vec{v})\right).\overrightarrow{z_0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_O}(2\to1).\overrightarrow{z_0} = \left(\iint_S R^2.f.p_0.d\theta.dz.\vec{u}\wedge\vec{v}\right).\overrightarrow{z_0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_O}(2\to1).\overrightarrow{z_0} = R^2.f.p_0.l.\psi$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_O}(2\to1) = R^2.f.p_0.l.\psi.\overrightarrow{z_0}$$

Question 4 : *En étudiant l'équilibre de la bobine, donner la relation entre N_{21} (composante du moment suivant $\overrightarrow{z_0}$) et C_{imp}.*

On isole la bobine. Bilan des actions mécaniques extérieures (BAME) :

- $2\to1 : \{\mathcal{T}_{2\to1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2\to1}} \\ \overrightarrow{M_O}(2\to1) \end{Bmatrix}_O$

- $0\to1 : \{\mathcal{T}_{0\to1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{0\to1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$

- Impression $\to 1 : \{\mathcal{T}_{imp\to1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -C_{imp}.\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_O$

Exprimons le théorème du moment statique suivant l'axe $(O,\overrightarrow{z_0})$:

$$\overrightarrow{M_O}(2\to1).\overrightarrow{z_0} - C_{imp} = 0$$

$$\Leftrightarrow N_{21} = C_{imp}$$

Avec $N_{21} = R^2.f.p_0.l.\psi$ d'après la question précédente.

Question 5 : *En déduire la largeur minimale de la courroie de sorte que l'exigence 1.1.1 est respectée. Ce résultat permet-il aussi de respecter l'exigence 1.3.1 ?*

Supposons que $p_0 = 1N.m^{-2}$ et calculons la largeur de courroie minimale requise :

$$N_{21} = C_{imp}$$

$$\Leftrightarrow R^2.f.p_0.l.\psi = C_{imp}$$

$$\Leftrightarrow l = \frac{C_{imp}}{R^2.f.p_0.\psi} = 0.16m$$

La courroie doit fait au moins 160mm de large pour ne pas imposer une pression de contact trop élevée avec le papier. L'exigence 1.3.1 est respectée aussi car $l < 200mm$.

Question 6 : *Montrer que l'action de la courroie sur la bobine est une force.*

$$\{\mathcal{T}_{2\to1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\mathrm{R}_{2\to1}} \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{M_O}(2\to1) \neq \vec{0} \end{Bmatrix}_O$$

$$\overrightarrow{\mathrm{R}_{2\to1}} \cdot \overrightarrow{M_O}(2\to1) = \left(-2.p_0.R.l.\sin\frac{\psi}{2}.\overrightarrow{x_0} + 2.f.p_0.R.l.\sin\frac{\psi}{2}.\overrightarrow{y_0}\right) \cdot (R^2.f.p_0.l.\psi.\overrightarrow{z_0}) = 0$$

Donc l'action de la courroie sur la bobine est une force.

Question 7 : *Transporter $\{\mathcal{T}_{2\to1}\}$ du point O vers le point E.*

$$\overrightarrow{M_E}(2\to1) = \overrightarrow{M_O}(2\to1) + \overrightarrow{EO} \wedge \overrightarrow{\mathrm{R}_{2\to1}}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_E}(2\to1) = R^2.f.p_0.l.\psi.\overrightarrow{z_0} - R.\overrightarrow{x_0} \wedge \left(-2.p_0.R.l.\sin\frac{\psi}{2}.\overrightarrow{x_0} + 2.f.p_0.R.l.\sin\frac{\psi}{2}.\overrightarrow{y_0}\right)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_E}(2\to1) = R^2.f.p_0.l.\psi.\overrightarrow{z_0} + 2.f.p_0.R^2.l.\sin\frac{\psi}{2}.\overrightarrow{z_0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_E}(2\to1) = R^2.f.p_0.l.\left(2.\sin\left(\frac{\psi}{2}\right) - \psi\right).\overrightarrow{z_0}$$

$$\{\mathcal{T}_{2\to1}\} = \begin{Bmatrix} -2.p_0.R.l.\sin\frac{\psi}{2}.\overrightarrow{x_0} + 2.f.p_0.R.l.\sin\frac{\psi}{2}.\overrightarrow{y_0} \\ R^2.f.p_0.l.\left(2.\sin\left(\frac{\psi}{2}\right) - \psi\right).\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_E$$

Question 8 : *Montrer que pour un angle ψ petit, pour lequel $\sin\psi \sim \psi$, le point E peut être assimilé au centre de poussée de la force exercée par la courroie sur la bobine.*

Pour un angle ψ petit, on a $\sin\psi \sim \psi$. On déduit donc l'approximation $\overrightarrow{M_E}(2\to1) \approx \vec{0}$.

Ainsi le point E peut être assimilé au centre de poussée (point appartenant à la droite d'action) de la force exercée par la courroie sur la bobine.

Question 9 : *Déterminer l'effort à fournir par le vérin noté $F_{vérin}$ afin d'assurer le maintien de la courroie sur la bobine. La démarche d'isolement(s), les bilans d'actions mécanique extérieures et le(s) théorème(s) utilisé(s) sont/seront clairement détaillé(s).*

On isole le vérin {6+7}. BAME :

- 0 → 7 : $\{\mathcal{T}_{0\to7}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{0\to7}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D$

- 5 → 6 : $\{\mathcal{T}_{5\to6}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{5\to6}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$

{6+7} est en équilibre sous l'action de 2 torseurs glisseurs (2 forces). Elles sont donc de même intensité, de sens opposées et sont portées par (CD) dirigée par $\overrightarrow{y_0}$. On en déduit :

$$\overrightarrow{R_{6\to5}} = F_{vérin}.\overrightarrow{y_0}$$

On isole maintenant Σ={2+3+4+5}. BAME :

- 1 → 2 : $\{\mathcal{T}_{1\to2}\} = \begin{Bmatrix} F_{bob}.(\overrightarrow{x_0} - f.\overrightarrow{y_0}) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_E$

- 6 → 5 : $\{\mathcal{T}_{6\to5}\} = \begin{Bmatrix} F_{vérin}.\overrightarrow{y_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$

- 0 → 5 (rotule) : $\{\mathcal{T}_{0\to5}^{R}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{0\to5}^{R}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$

- 0 → 5 (sphère-cylindre) : $\{\mathcal{T}_{0\to5}^{SC}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{0\to5}^{SC}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$

Le vérin engendre la rotation de Σ autour de l'axe $(A, \overrightarrow{z_0})$, et la bobine génère une force en E qui s'oppose à cette rotation. On exprime le TMS en projection sur l'axe $(A, \overrightarrow{z_0})$ pour relier $F_{vérin}$ à F_{bob} :

$$\left[\overrightarrow{AE} \wedge F_{bob}.(\overrightarrow{x_0} - f.\overrightarrow{y_0}) + \overrightarrow{AC} \wedge F_{vérin}.\overrightarrow{y_0}\right].\overrightarrow{z_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left((R - x_A).\overrightarrow{x_0} + y_A.\overrightarrow{y_0} - z_A.\overrightarrow{z_0}\right) \wedge F_{bob}.(\overrightarrow{x_0} - f.\overrightarrow{y_0}) + \left((x_C - x_A).\overrightarrow{x_0} + (z_C - z_A).\overrightarrow{z_0}\right) \wedge F_{vérin}.\overrightarrow{y_0}\right].\overrightarrow{z_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_A - R).F_{bob}.f - y_A.F_{bob} + (x_C - x_A).F_{vérin} = 0$$

$$\Leftrightarrow F_{vérin} = \frac{\left((R - x_A).f + y_A\right).F_{bob}}{x_C - x_A} = 2976N$$

Question 10 : *En déduire la pression d'alimentation à fournir pour garantir l'équilibre du système. Pour cela, on donnera clairement l'expression de la surface utile du vérin, notée S_{utile}, en fonction des dimensions données sur la figure n°3. Conclure ensuite quant au respect de l'exigence 1.2.1.*

La surface utile est la projection de la surface en contact avec l'air suivant la direction de travail du vérin (ici $\overrightarrow{y_0}$). On en déduit :

$$S_{utile} = \pi.\left(r_{corps}^2 - r_{tige}^2\right)$$

La poussée délivrée par le vérin vaut :

$$F_{vérin} = p_{vérin}.S_{utile}$$

Soit :

$$p_{vérin} = \frac{F_{vérin}}{S_{utile}} = 3.95 * 10^5 Pa = 3.95\ bars$$

$p_{vérin} < 6\ bars$ donc le système respecte l'exigence 1.2.1.

1.1 Sollicitation du bâti : Exigence 1.4.1

Dans cette partie, on admet que le vérin développe une poussée $F_{\text{vérin}}$ de 3000N.

Question 11 : *Donner la forme des torseurs d'action mécanique transmissible par les liaisons en A et B. On distinguera clairement les composantes de l'un et de l'autre par les notations adoptées.*

$$\{\mathcal{T}_{0\to5}^{R}\} = \begin{Bmatrix}\overrightarrow{R_{0\to5}^{R}}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix}X_A.\overrightarrow{x_0} + Y_A.\overrightarrow{y_0} + Z_A.\overrightarrow{z_0}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_A$$

$$\{\mathcal{T}_{0\to5}^{SC}\} = \begin{Bmatrix}\overrightarrow{R_{0\to5}^{SC}}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix}X_B.\overrightarrow{x_0} + Y_B.\overrightarrow{y_0}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_B$$

Question 12 : *Par un ou plusieurs isolements, déterminer les composantes des torseurs dont la forme a été établie à la question précédente. Les expressions de F_{bob} et $F_{vérin}$ ne seront pas développées. Conclure quant au respect de l'exigence 1.4.1 après application numérique.*

On isole Σ={2+3+4+5}. BAME identique au précédent avec cette fois-ci $F_{vérin}$ connue :

- $1 \to 2$: $\{\mathcal{T}_{1\to2}\} = \begin{Bmatrix}F_{bob}.(\overrightarrow{x_0} - f.\overrightarrow{y_0})\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_E$

- $6 \to 5$: $\{\mathcal{T}_{6\to5}\} = \begin{Bmatrix}F_{vérin}.\overrightarrow{y_0}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_C$

- $0 \to 5$ (rotule) : $\{\mathcal{T}_{0\to5}^{R}\} = \begin{Bmatrix}\overrightarrow{R_{0\to5}^{R}}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix}X_A.\overrightarrow{x_0} + Y_A.\overrightarrow{y_0} + Z_A.\overrightarrow{z_0}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_A$

- $0 \to 5$ (sphère-cylindre) : $\{\mathcal{T}_{0\to5}^{SC}\} = \begin{Bmatrix}\overrightarrow{R_{0\to5}^{SC}}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix}X_B.\overrightarrow{x_0} + Y_B.\overrightarrow{y_0}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_B$

Théorème de la résultante statique en projection dans $\mathcal{R}_0$:

$$\begin{cases}X_A + X_B + F_{bob} = 0\\ Y_A + Y_B + F_{vérin} - f.F_{bob} = 0\\ Z_A = 0\end{cases}$$

Transport des torseurs au point A pour l'expression du TMS :

$$\overrightarrow{M_A^{SC}}(0\to5) = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\mathrm{R}_{0\to5}^{SC}} = (z_B - z_A).X_B.\overrightarrow{y_0} - (z_B - z_A).Y_B.\overrightarrow{x_0}$$

$$\overrightarrow{M_A}(1\to2) = \overrightarrow{AE} \wedge F_{bob}.(\overrightarrow{x_0} - f.\overrightarrow{y_0}) = -z_A.F_{bob}.f.\overrightarrow{x_0} - z_A.F_{bob}.\overrightarrow{y_0} - \big((R - x_A).F_{bob}.f - y_A.F_{bob}\big).\overrightarrow{z_0}$$

$$\overrightarrow{M_A}(6\to5) = \overrightarrow{AC} \wedge F_{vérin}.\overrightarrow{y_0} = (x_C - x_A).F_{vérin}.\overrightarrow{z_0} - (z_C - z_A).F_{vérin}.\overrightarrow{x_0}$$

Projection des équations du TMS dans $\mathcal{R}_0$:

$$\begin{cases}-(z_B - z_A).Y_B - z_A.F_{bob}.f - (z_C - z_A).F_{vérin} = 0\\ (z_B - z_A).X_B - z_A.F_{bob} = 0\\ \big((x_A - R).F_{bob}.f - y_A.F_{bob}\big) + (x_C - x_A).F_{vérin} = 0\end{cases}$$

La résolution du problème à 6 équations scalaires et 6 inconnues donne :

$$X_A = -\frac{z_B.F_{bob}}{z_B - z_A} = 3360N$$

$$X_B = \frac{z_A.F_{bob}}{z_B - z_A} = 2400N$$

$$Y_A = -\frac{z_B.F_{bob}.f + (z_C - z_B).F_{vérin}}{z_A - z_B} = -3867N$$

$$Y_B = \frac{z_A.F_{bob}.f + (z_C - z_A).F_{vérin}}{z_A - z_B} = 1155N$$

$$Z_A = 0N$$