6.8.3 Effet tunnel-Exercice 5

Une particule arrive de $x = -\infty$ avec une énergie $0 < E < V_0$ sur une marche de potentiel :
$x < 0 :\ V(x) = 0$ (région 1)
$x > 0 :\ V(x) = V_0 > 0$ (région 2)

a-Décrire l'évolution de la particule dans le cadre de la mécanique classique.

b-On se place désormais dans le cadre de la mécanique quantique et on cherche des états stationnaires de fonction d'onde $\psi(x,t) = \varphi(x)e^{-iEt/\hbar}$ solution de l'équation de Schrödinger :
$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}(x,t) + V(x)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}(x,t)$ On pose : $k = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar}$ et $\alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$
Expliciter les solutions générales $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ dans les deux régions en introduisant des constantes complexes A_1, B_1, A_2 et B_2. Justifier que l'une d'entre elles doit être éliminée.
Quelle est la nature de l'onde dans le domaine $x > 0$?

c-On définit le courant de probabilité par : $j = \frac{i\hbar}{2m}(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x} - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x})$. Que représente jdt ?

d-Déterminer les coefficients de transmission T et de réflexion R de la marche de potentiel définis comme des rapports de courants de probabilité. Calculer $R + T$. et commenter.

---

a- Pour $x > 0$: $E = E_c + V_0$ => $E_c = E - V_0 < 0$ impossible. La particule ne peut pas franchir la marche.

b-Région 1 : $\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi_1 = 0$ de solution $\boxed{\varphi_1 = A_1e^{ikx} + B_1e^{-ikx}}$
Région 2 : $\frac{d^2\varphi_2}{dx^2} - \frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}\varphi_2 = 0$ de solution $\boxed{\varphi_2 = A_2e^{-\alpha x} + B_2e^{\alpha x}}$
Terme en A_1 : onde incidente progressive dans le sens > 0 de Ox
Terme en B_1 : onde réfléchie progressive dans le sens < 0 de Ox
Onde évanescente du coté $x > 0$. $B_2 = 0$ pour que la fonction d'onde soit normalisable.

c-jdt = probabilité que la particule franchisse l'abscisse x entre t et $t + dt$

d-Onde incidente $\psi_{inc} = A_1e^{ikx}e^{-iEt/\hbar}$ => $j_{inc} = \frac{i\hbar}{2m}(A_1e^{ikx}(-ik)A_1^*e^{-ikx} - A_1^*e^{-ikx}ikA_1e^{ikx}) = \frac{\hbar k}{m}|A_1|^2$
Onde réfléchie $\psi_{ref} = B_1e^{-ikx}e^{-iEt/\hbar}$ => $j_{ref} = -\frac{\hbar k}{m}|B_1|^2$
Onde transmise $\psi_2 = A_2e^{-\alpha x}e^{-iEt/\hbar}$ => $j_{trans} = \frac{i\hbar}{2m}(A_2e^{-\alpha x}(-\alpha)A_2^*e^{-\alpha_2 x} - A_2^*e^{-\alpha x}(-\alpha)A_2e^{-\alpha x}) = 0$
Par définition : $T = \left|\frac{j_{trans}}{j_{inc}}\right|$ et $R = \left|\frac{j_{ref}}{j_{inc}}\right| = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2}$
On en déduit : $T = 0$

Continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée en x = 0 : $A_1 + B_1 = A_2$ et $ik(A_1 - B_1) = -\alpha A_2$
D'où : $\frac{B_1}{A_1} = \frac{\alpha+ik}{-\alpha+ik}$ puis $R = 1$

On a : $\boxed{R + T = 1}$ Conservation de la probabilité.
