Planches INP : cinquième série

INP • Planche R

Exercice majeur

On dispose d'une urne contenant trois jetons indiscernables numérotés 1, 2 et 3.
On effectue une série de tirages indépendants d'un jeton, avec remise.
On note :

- Y la variable aléatoire indiquant le nombre de tirages nécessaires pour obtenir deux numéros différents ;
- Z la variable aléatoire indiquant le nombre de tirages nécessaires pour avoir les trois numéros.

1) Déterminer la loi de Y.

2) Déterminer la loi de $Y-1$.

3) En déduire $\mathrm{E}(Y)$ et $\mathrm{V}(Y)$.

4) Déterminer la loi du couple (Y,Z).

5) Déterminer la loi de Z.

6) Les variables Y et $Z-Y$ sont-elles indépendantes ?

Exercice mineur

Soit E un espace euclidien, $g \in \mathrm{O}(E)$ et $f = g - \mathrm{id}_E$.

1) Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \left(\mathrm{Ker}(f)\right)^{\perp}$.
Y a-t-il égalité ?

2) Montrer que :

$$\forall x \in E, \quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g^k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} p(x),$$

où p est la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{id}_E)$.

INP • Planche S

Exercice majeur

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\Psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x(t^2+1)}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que Ψ est bien définie et montrer qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2) Montrer qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Calculer $\Psi(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \Psi(x)$.

On note $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

4) Montrer que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \;\; \Psi'(x) = -A\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$.

5) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \Psi'(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.
En déduire la valeur de A.

Exercice mineur

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère N urnes numérotées de 1 à N.
Dans l'urne i, il y a i boules numérotées de 1 à i.
On choisit au hasard, successivement, une urne, puis une boule dans cette urne. On note X le numéro de la boule tirée.

1) Donner la loi de X.

2) Déterminer l'espérance de X.

INP • Planche T

Exercice majeur

On définit l'application φ qui à un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de X^2P par X^4-1.

1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2) Calculer $A = \underset{\mathscr{B}}{\operatorname{mat}}(\varphi)$ où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

3) Montrer que φ est diagonalisable.

4) Quelles sont les valeurs propres de φ ?

5) Quels sont les sous-espaces propres associés ?

6) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

7) φ est-elle un automorphisme ?

Exercice mineur

Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Justifier l'existence de I.

2) Montrer que : $\quad I = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}$.

INP • Planche U

Exercice majeur

Soit $f : x \mapsto \arcsin(x)\sqrt{1-x^2}$.

1) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I que l'on précisera.

Soit l'équation différentielle

$$(1-x^2)\,y'(x) + x\,y(x) = c(x), \qquad (*)$$

où c est une fonction continue sur I.

2) Donner $c(x)$ quand f est solution de $(*)$.

3) Montrer que $(*)$ admet une unique solution impaire et développable en série entière.

4) En déduire que f admet un développement en série entière.

5) Calculer le développement en série entière de f.

Exercice mineur

Soit A la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} a+b & a\,b & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & a\,b & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a\,b \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{pmatrix},$$

où $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On note $d_n = \det(A_n)$.

1) Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$.

2) En déduire une expression de d_n en fonction de n, a et b.
