

Programme de Colle numero 30

Série, déterminant, espace préhilbertien

Semaine du 15 juin 2026 :

Analyse : chapitre 12 : série numérique , ALgèbre : chapitre 14 : déterminant, Algèbre :
chapitre 15 : espace préhilbertien (jusqu'à Gram-Schmitt)

? AUTO-TEST

Vous devez pouvoir répondre le plus précisément possible aux questions ci dessous.

► **AL14 : déterminant**

- Qu'est ce que le déterminant d'une famille de vecteur ?
- Donner les formules et les moyens mémo-technique pour le calcul en dim 2 ou 3.
- Qu'est ce que le déterminant d'un endomorphisme ? Pourquoi ne dépend-il pas de la base ?
- Qu'est ce que le déterminant d'une matrice ?
- Qu'est ce que le développement selon une ligne ou une colonne ?

► **AN13 : Séries numériques**

- Qu'est ce qu'une série ?
- Qu'appelle-t-on somme partielle ? Qu'est-ce qu'une série convergente ?
- Pourquoi l'étude des séries à termes positives est-elle facilitée ? Quels critères de convergence pour ces séries ?
- Présentez la comparaison série/intégrale.
- Convergence et sommes éventuelles des séries usuelles $\sum q^n$, $\sum \frac{z^n}{n!}$, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$
- Qu'est-ce que la convergence absolue ?

► **AL15 : espace préhilbertien réel**

- Qu'est-ce qu'un produit scalaire ?
- Donner les produits scalaires usuels dans \mathbb{R}^n , dans $\mathcal{C}([a, b])$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
- qu'est ce que la norme associée à un produit scalaire ? la distance associée à un produit scalaire ?
- Qu'est-ce que l'orthogonalité ? L'orthogonal d'un espace ?
- que dire d'une famille orthogonale ?
- Qu'est ce que l'algorithme de Gram-Schmidt ? Quelles conséquences sur les bases en dimension finie ?

Cette liste de question n'est pas exhaustive, mais savoir y répondre précisément et rapidement est un bon indice de connaissance de votre cours.



COMPÉTENCES OU SAVOIRS-FAIRE

1. Déterminer la nature d'une série en utilisant et en justifiant soigneusement l'utilisation des différents critères.
2. Calculer des sommes de série à partir des séries usuelles.
3. Utiliser une comparaison série / intégrale (tout faire, pas seulement l'encadrement final)
4. Montrez qu'une application donnée est un produit scalaire.
5. Savoir orthonormaliser une base via gram schmidt.
6. Calculer une projection orthogonale, une distance....



DEMONSTRATIONS EXIGIBLES

- Montrez que si $A \subset E$, alors A^\perp est un sous espace vectoriel.
- Démontrez l'inégalité de Cauchy-Schwarz
- Montrez que si une famille (e_1, e_2, \dots, e_n) est une famille orthogonale dont tous les vecteurs sont non nuls, alors cette famille est libre.