

Corrigés des planches INP : quatrième série

INP • Planche N

■ Exercice majeur

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & & & \\ \vdots & & (0) & \\ n & & & \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer le rang de A et $\dim(\text{Ker}(A))$.

Solution.

- Les colonnes C_3 à C_n sont des multiples de C_2 ($C_k = k/2 \cdot C_2$) donc $\text{rg}(A) = \text{rg}(C_1, C_2) = 2$ car les 2 premières colonnes sont non colinéaires (grâce aux coefficients $a_{2,1} = 2$ et $a_{2,2} = 0$).
- Par le théorème du rang matriciel :

$$\dim(\text{Ker}A) = n_{\text{col}}(A) - \text{rg}(A) = n - 2.$$

2) Montrer que A est diagonalisable.

Solution. A est symétrique à coefficients réels donc elle est diagonalisable par le théorème spectral.

3) Quel est l'ordre de multiplicité de la valeur propre nulle ?

Solution. Notons que 0 est une valeur propre de A car $\dim(\text{Ker}A) = n - 2 \geq 1$.

De plus, comme A est diagonalisable, l'ordre de multiplicité de ses valeurs propres est égale à la dimension du SEP associé :

$$m_0(A) = \dim(E_0(A)) = \dim(\text{Ker}A) = n - 2.$$

4) Montrer que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} : X^T A X \leq \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (\lambda) \cdot (X^T X),$$

avec égalité si et seulement si X est vecteur propre de A pour la plus grande valeur propre de A .

Solution.

* Munissons \mathbb{R}^n de son produit scalaire canonique.

Considérons $u : V \mapsto AV$ l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à A . Comme la base canonique est orthonormée, u est autoadjoint et par le théorème spectral, il existe une base (V_1, \dots, V_n) de \mathbb{R}^n **orthonormée**, constituée de vecteurs propres de u . Notons $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres associées.

* Prenons $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0, n, 1\}$ que l'on décompose sur cette base

$$X = \sum_{i=1}^n x_i V_i. \text{ On obtient alors :}$$

$$\begin{aligned} X^T A X &= \langle X, AX \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i V_i, \sum_{j=1}^n x_j AV_j \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i V_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j V_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_j x_i x_j \langle V_i, V_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \end{aligned}$$

car la base (V_1, \dots, V_n) est orthonormée. En notant $M := \max(\text{Sp}(A))$, on obtient :

$$X^T A X \leq M \sum_{i=1}^n x_i^2 = M \|X\|^2 = M X^T X,$$

car les x_i sont les coordonnées du vecteur X dans la b.o.n. (V_1, \dots, V_n) . En conclusion :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0, n, 1\} : X^T A X \leq M \cdot (X^T X).$$

* Supposons qu'il y ait égalité. Alors :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 = \sum_{i=1}^n M x_i^2 \text{ donc } \sum_{i=1}^n (M - \lambda_i) x_i^2 = 0.$$

Il s'agit d'une somme de termes positifs, donc puisqu'elle est nulle, tous ses termes sont nuls :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket : (M - \lambda_i) x_i^2 = 0 \text{ c.à.d. } M = \lambda_i \text{ ou } x_i = 0.$$

Les x_i sont nuls pour tous les i tels que $\lambda_i < M$.

On en déduit que X est combinaison linéaire des vecteurs V_i associés à la plus grande valeur propre M , donc $X \in E_M(A)$.

Comme $X \neq 0_{n,1}$, c'est un vecteur propre de A associé de A à sa plus grande valeur propre.

5) Montrer que A a 3 valeurs propres distinctes 0, λ , $1 - \lambda$ avec $\lambda > 1$.

Solution.

- Comme A est diagonalisable, χ_A est scindé sur \mathbb{R} ; on a vu que $m_0(A) = n - 2$, donc χ_A s'écrit :

$$\chi_A = X^{n-2} \cdot (X - \lambda) \cdot (X - \mu) \text{ où } \lambda, \mu \neq 0.$$

La somme des valeurs propres vaut $\text{tr}(A) = 1$, donc $0 + \dots + 0 + \lambda + \mu = 1$, c.à.d. $\mu = 1 - \lambda$.

Ainsi : il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\text{Sp}(A) = \{0, \lambda, 1 - \lambda\}$.

- Remarquons que la plus grande valeur propre de A se trouve parmi λ et μ . En effet, si la plus grande valeur propre était 0, on aurait $\lambda < 0$ et $\mu < 0$ donc $\lambda + \mu < 0$: cela contredit $\lambda + \mu = 1$. Quitte à échanger λ et μ , nous supposons que λ est la plus grande valeur propre de A .

Pour montrer que $\lambda > 1$, on applique la question précédente avec le vecteur $X = (1, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \lambda &\geq \frac{X^T A X}{X^T X} = \frac{\langle X, AX \rangle}{\|X\|^2} \\ &= \frac{\langle (1, 1, 0, \dots, 0), (3, 2, 3, 4, \dots, n) \rangle}{2} \\ &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Cela prouve en particulier que $\lambda > 1$.

Remarque. On peut prendre d'autres vecteurs X pour obtenir de meilleures minoration, par exemple $X = (1, 0, \dots, 0, 1)$ qui donnera $\lambda \geq n + \frac{1}{2}$. Il est également possible de déterminer la valeur exacte de λ en résolvant directement l'équation aux éléments propres $AV = \lambda V$ pour $\lambda \neq 0$.

■ Exercice mineur

On pose, pour tout réel $x \in [0, 1]$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1 + n^2 x^2} \text{ et } M_n = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1 + n^2 x^2} dx.$$

1) Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f , que l'on précisera.

Solution. Fixons $x \in [0, 1]$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1 + n^2 x^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Conclusion : La suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction $f = \mathbb{1}_{\{0\}}$.

2) Soit $\alpha \in]0, 1]$. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $[\alpha, 1]$.

Solution. Fixons $\alpha \in]0, 1]$ et $I = [\alpha, 1]$; majorons $\|f_n - f\|_\infty^I$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (comme on s'intéresse à la limite quand $n \rightarrow \infty$, on peut ignorer f_0):

$$\forall x \in [\alpha, 1]: |f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{e^{-x}}{1+n^2 x^2} - 0 \right| = \frac{e^{-x}}{1+n^2 x^2}.$$

Puisque $1+n^2 x^2 \geq 1+\alpha^2 n^2 \geq \alpha^2 n^2 > 0$:

$$\forall x \in [\alpha, 1]: |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\alpha^2 n^2}, \text{ indép. de } x.$$

On en déduit que :

$$\forall n \geq 1: \|f_n - f\|_\infty^I \leq \frac{1}{\alpha^2 n^2}.$$

Puisque $\frac{1}{n^2 \alpha^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, par le théorème d'encadrement : $\|f_n - f\|_\infty^I \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Conclusion : Pour tout $\alpha \in]0, 1]$, la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur I vers la fonction f .

3) Qu'en est-il sur l'intervalle $[0, 1]$?

Solution. On remarque que toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0, 1]$, mais pas leur limite simple $f = \mathbf{1}_{\{0\}}$ (qui est discontinue en 0).

La convergence de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ ne peut donc pas être uniforme sur le segment $[0, 1]$, car cela contredirait le théorème de transfert de continuité.

4) Déterminer la limite de la suite $(M_n)_{n > 0}$.

Solution. On applique le **théorème de convergence dominée** à la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ sur le segment $[0, 1]$:

- * La suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur I vers $f = \mathbf{1}_{\{0\}}$;
- * Toutes les fonctions f_n , ainsi que f , sont c.p.m. sur $[0, 1]$;
- * Dominons les fonctions f_n par une fonction ϕ intégrable sur $[0, 1]$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1]: |f_n(x)| = \frac{e^{-x}}{1+n^2 x^2} \leq 1 \text{ indép. de } n,$$

donc la fonction $\phi: x \mapsto 1$ convient : les fonctions constantes sont intégrables sur les intervalles bornés (comme par exemple le segment $[0, 1]$).

Le théorème s'applique, et on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}: M_n = \int_0^1 f_n(x) dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$.

Remarque. Le théorème d'interversion \lim / \int sur un segment ne s'applique pas ici, car la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas uniformément sur le segment $[0, 1]$.

INP • Planche P

■ Exercice majeur

$$\text{Soit } f: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)} dt.$$

1) Déterminer le domaine de définition \mathcal{D} de f .

Solution. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et déterminons si l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)} dt$ est convergente.

La fonction $\phi: t \mapsto \frac{1}{t^x(1+t)}$ est c.p.m. (car continue) sur $]0, +\infty[$. Comme cette fonction est positive, prouver la convergence de l'intégrale est équivalent à prouver que la fonction est intégrable.

- * En 0^+ , $\phi(t) \sim \frac{1}{t^x}$, donc $\phi \in L^1(]0, 1])$ si et seulement si $x < 1$;

* En $+\infty$, $\phi(t) \sim \frac{1}{t^{x+1}}$, donc $\phi \in L^1([1, +\infty[)$ si et seulement si $x+1 > 1$, c.à.d. $x > 0$.

Ainsi $\phi \in L^1(]0, +\infty[)$ si et seulement si $x \in]0, 1[$.

Conclusion : $\mathcal{D} =]0, 1[$.

2) Montrer que f est continue sur \mathcal{D} .

Solution. On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

Posons $g:]0, +\infty[\times]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$.

$$(t, x) \mapsto \frac{1}{t^x(1+t)}.$$

* Pour $t \in]0, +\infty[$ fixé :

$$x \mapsto \frac{1}{t^x(1+t)} = \frac{1}{e^{x \ln(t)}(1+t)}$$

est continue sur $]0, 1[$;

* Pour $x \in]0, 1[$ fixé, $t \mapsto \frac{1}{t^x(1+t)}$ est c.p.m. sur $]0, +\infty[$;

* Effectuons une domination locale.

Prenons un segment $[a, b] \subset]0, 1[$ et majorons :

$$\forall x \in [a, b], \forall t > 0: |g(t, x)| = \frac{1}{t^x(1+t)} = \frac{1}{e^{x \ln(t)}(1+t)}.$$

→ 1^{er} cas : si $0 < t \leq 1$, alors $\ln(t) \leq 0$.

Puisque $x \leq b$, $x \ln(t) \geq b \ln(t)$, $e^{x \ln(t)} \geq e^{b \ln(t)}$

c.à.d. $t^x \geq t^b$;

et comme $1+t > 1$: $t^x(1+t) \geq t^b > 0$,

et enfin : $|g(t, x)| \leq \frac{1}{t^b}$.

→ 2^e cas : si $t > 1$,

on prouve de façon similaire : $|g(t, x)| \leq \frac{1}{t^{a+1}}$.

$$\text{En posant } \phi: t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{t^b} & \text{si } 0 < t \leq 1, \\ \frac{1}{t^{a+1}} & \text{si } t > 1, \end{cases}$$

alors $\phi \in L^1(]0, +\infty[)$ et on a :

$$\forall x \in [a, b], \forall t > 0: |g(t, x)| \leq \phi(t).$$

Le théorème s'applique, prouvant que f est continue sur $]0, 1[$.

3) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}$:

$$1-x \in \mathcal{D} \text{ et } f(x) = f(1-x).$$

Solution. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $0 < x < 1$ donc $-1 < -x < 0$ puis $0 < 1-x < 1$ c.à.d. $1-x \in \mathcal{D}$.

Fixons $x \in \mathcal{D}$ et effectuons le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ dans l'intégrale définissant $f(x)$. Quand $t \rightarrow 0^+$, $u \rightarrow +\infty$ et quand $t \rightarrow +\infty$, $u \rightarrow 0^+$ et on a $dt = -\frac{1}{u^2} du$.

Puisque l'intégrale de départ est convergente, le changement de variable est légitime et :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)} dt \\ &= \int_{+\infty}^0 \frac{1}{(1/u)^x(1+1/u)} \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right) du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{u \cdot u^{-x} \times u \cdot (1+1/u)} du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^{1-x}(u+1)} du \\ &= f(1-x). \end{aligned}$$

$$\text{On introduit } h: x \mapsto \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt.$$

4) Montrer que h est continue sur $]0, +\infty[$.

Solution. On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètres une nouvelle fois. On effectue une domination locale (pour tout $x \in [a, b]$, segment inclus dans $]0, +\infty[$) par la fonction dominante $\phi: t \mapsto \frac{1}{t^{1-a}}$.

5) Montrer que :

$$\forall x \in \mathcal{D} : f(x) = h(1-x) + \frac{1}{x} - h(1+x).$$

Solution. Pour $x \in \mathcal{D}$ fixé, par la relation de Chasles pour les intégrales généralisées :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 \frac{1}{t^x(1+t)} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^{(1-x)-1}}{1+t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)} dt \\ &= h(1-x) + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)} dt. \end{aligned}$$

Dans cette dernière intégrale, on effectue le changement de variable usuel $t = \frac{1}{u}$, pour lequel $dt = -\frac{1}{u^2} du$:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)} dt &= \int_1^0 \frac{1}{(1/u)^x(1+1/u)} \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right) du \\ &= \int_0^1 \frac{u^{x-1}}{u+1} du. \end{aligned}$$

Pour faire apparaître $h(1+x)$, on écrit au numérateur $1 = (u+1) - u$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{t^x(1+t)} dt &= \int_0^1 \frac{u^{x-1}((u+1)-u)}{u+1} du \\ &= \int_0^1 \left(u^{x-1} - \frac{u^{(1+x)-1}}{u+1} \right) du \\ &= \int_0^1 u^{x-1} du - \int_0^1 \frac{u^{(1+x)-1}}{u+1} du ; \end{aligned}$$

utiliser la linéarité de l'intégrale est possible ici car les deux intégrales obtenues sont convergentes : intégrale de Riemann en 0^+ d'exposant $\alpha = 1-x < 1$, et intégrale définissant $h(1+x)$.
Finalement :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)} dt &= \left[\frac{u^x}{x} \right]_0^1 - h(1+x) \\ &= \frac{1}{x} - h(1+x). \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathcal{D} : f(x) = h(1-x) + \frac{1}{x} - h(1+x).$

6) En déduire un équivalent de f aux bornes de son intervalle de définition.

Solution.

- **Équivalent en 0^+ .** Faisons tendre x vers 0^+ dans la formule précédente. Puisque h est continue en 1, $h(1-x)$ et $h(1+x)$ tendent vers $h(1)$, ce qui permet de les écrire $h(1) + o(1)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= h(1-x) + \frac{1}{x} - h(1+x) \\ &= (h(1) + o(1)) + \frac{1}{x} - (h(1) + o(1)) \\ &= \frac{1}{x} + o(1). \end{aligned}$$

Puisque 1 est négligeable devant $1/x$ en 0^+ , on a à plus forte raison :

$$f(x) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Équivalent en 1^- . On ramène le problème en 0^+ en posant $x = 1-h$; on utilise ensuite la question 3 et l'équivalent en 0^+ que l'on a trouvé ci-dessus :

$$f(x) = f(1-h) = f(h) \underset{\substack{h \rightarrow 0^+ \\ x \rightarrow 1^-}}{\sim} \frac{1}{h} = \frac{1}{1-x}.$$

Conclusion : $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$ et $f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{1-x}$.

■ **Exercice mineur**

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X] : f(P) = P - P'.$$

1) Calculer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Solution.

Remarque. On peut expliquer rapidement que f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$: la linéarité ne fait pas de doute, mais souligner rapidement que si $P \in \mathbb{R}_3[X]$, alors :

$$\deg(f(P)) \leq \max(\deg(P), \deg(P')) = \deg(P) \leq 3.$$

Les images des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ par f sont :

$$f(1) = 1, f(X) = X - 1, f(X^2) = X^2 - 2X \text{ et } f(X^3) = X^3 - 3X.$$

On en déduit que :

$$\underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) f est-il diagonalisable ?

Solution. Comme la matrice M de f dans la base canonique est triangulaire supérieure, les valeurs propres de f se trouvent sur la diagonale :

$$\text{Sp}(f) = \{1\}.$$

Si f était diagonalisable, sa matrice dans une base de vecteurs propres serait nécessairement $\text{diag}(1, 1, 1, 1) = I_4$; on en déduirait que $f = \text{id}_{\mathbb{R}_3[X]}$ et donc que $M = I_4$: ce n'est pas le cas.

Remarque. On peut aussi constater que

$$\dim E_1(f) = \dim(E_1(M)) = 1 \neq 4 = m_1(f).$$

3) Montrer que f est bijectif.

Solution. f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Puisque 0 n'est pas valeur propre de f , alors f est bijectif.

4) Trouver un antécédent de X par f ; même question pour X^2 et X^3 . Déterminer f^{-1} .

Solution. On peut inverser rapidement la matrice de f par le miroir de Gauss-Jordan. On obtient :

$$\underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(f^{-1}) = \left(\underset{\mathcal{B}}{\text{mat}}(f) \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de cette matrice donnent les antécédents de 1, X , X^2 et X^3 par f ; on obtient :

$$\begin{aligned} f^{-1}(1) &= 1 \\ f^{-1}(X) &= 1 + X \\ f^{-1}(X^2) &= 2 + 2X + X^2 \\ f^{-1}(X^3) &= 6 + 6X + 3X^2 + X^3. \end{aligned}$$

Plus généralement :

$$\forall P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X] :$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(P) &= (a + b + 2c + 6d) \cdot 1 + (b + 2c + 6d) \cdot X \\ &\quad + (c + 3d) \cdot X^2 + d \cdot X^3. \end{aligned}$$

INP • Planche Q

■ **Exercice majeur**

On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$a_0 = a_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+2}.$$

1) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs.

Solution. Par récurrence **double** sur $n \in \mathbb{N}$, montrons les propositions :

$$\mathcal{H}(n) : \ll a_n > 0 \gg.$$

* **Initialisation.** Puisque $a_0 = a_1 = 1$, $\mathcal{H}(0)$ et $\mathcal{H}(1)$ sont vraies.

* **Hérédité double.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}(n)$ et $\mathcal{H}(n+1)$ sont vraies : $a_n > 0$ et $a_{n+1} > 0$. Puisque $a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+2}$, $a_{n+2} > 0$ également et $\mathcal{H}(n+2)$ est démontrée.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$.

2) a. Montrer que cette suite est strictement monotone à partir du rang 1.

Solution. En utilisant la définition de la suite et la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{a_n}{n+2} > 0$$

c'est-à-dire, par une translation d'indice :

$$\forall n \geq 1 : a_{n+1} - a_n > 0.$$

En d'autres termes, la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante à partir du rang 1.

b. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} (a_{n+2} - a_{n+1})$ est divergente et en déduire la limite de la suite (a_n) .

Solution.

- Comme précédemment : $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{a_n}{n+2}$. Comme la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ vérifie $a_0 = a_1 = 1$ et qu'elle est strictement croissante à partir du rang 1, cette suite est globalement croissante. Elle est donc minorée par son premier terme $a_0 = 1$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{a_n}{n+2} \geq \frac{1}{n+2} \geq 0.$$

Comme la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+2}$ est divergente (c'est à peu de chose près la série harmonique), par théorème de comparaison, la série $\sum_{n \geq 0} (a_{n+2} - a_{n+1})$ est également divergente.

- La **série télescopique** $\sum_{n \geq 0} (a_{n+2} - a_{n+1})$ est de même nature que la **suite** $(a_n)_{n \geq 0}$: la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est donc divergente elle aussi.

En outre, cette suite est croissante, donc elle admet une limite (finie ou infinie).

Puisqu'elle est divergente, cette limite ne peut être que $+\infty$.

Conclusion : $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$.

On note $S(x)$ la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, pour les réels x pour lesquels elle existe.

3) a. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

Solution. Comme tous les termes de la suite (a_n) sont non nuls (ils sont supérieurs ou égaux à 1), on peut appliquer la règle de d'Alembert pour les séries entières.

On part de la relation de récurrence, que l'on divise par $a_{n+1} > 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n+2} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Puisque la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est positive d'une part, et croissante d'autre part, on a : $0 \leq \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$. On obtient l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leq \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n+2}.$$

Les deux extrémités tendent vers 1 quand $n \rightarrow \infty$, donc par le théorème des gendarmes :

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1, \text{ d'où également : } \frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1.$$

La règle de d'Alembert s'applique et on obtient : $R = \frac{1}{1} = 1$.

b. Montrer que, sur l'intervalle ouvert de convergence, la fonction S vérifie l'équation différentielle :

$$(x-1)y' + (x+1)y = 0.$$

Solution. Prenons $x \in]-R, R[=]-1, 1[$, de sorte que

$$S(x) = \sum_0^\infty a_n x^n.$$

Les sommes de séries entières se dérivent terme à terme sur l'ouvert de convergence, d'où :

$$S'(x) = \sum_1^\infty n a_n x^{n-1}.$$

On injecte dans l'équation :

$$\begin{aligned} (x-1)S'(x) + (x+1)S(x) &= (x-1) \sum_1^\infty n a_n x^{n-1} + (x+1) \sum_0^\infty a_n x^n \\ &= \sum_1^\infty n a_n x^n - \sum_1^\infty n a_n x^{n-1} + \sum_0^\infty a_n x^{n+1} + \sum_0^\infty a_n x^n \\ &= \sum_1^\infty n a_n x^n - \sum_0^\infty (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_1^\infty a_{n-1} x^n + \sum_0^\infty a_n x^n \\ &= (a_0 - a_1)x^0 + \sum_1^\infty [-(n+1)a_{n+1} + (n+1)a_n + a_{n-1}] x^n. \end{aligned}$$

Comme $a_0 = a_1 = 1$ et grâce à la relation de récurrence, cette expression est nulle.

Conclusion : $\forall x \in]-1, 1[: (x-1)S'(x) + (x+1)S(x) = 0$.

c. En déduire l'expression de S .

Solution. Résolvons l'équation différentielle

$$(H) \quad (x-1)y' + (x+1)y = 0$$

sur l'intervalle $I :=]-1, 1[$. C'est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, sans singularité : nous allons trouver une droite vectorielle de solutions. La fonction

$$a : x \mapsto \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

a pour primitive sur l'intervalle I

$$A : x \mapsto x + 2 \ln|x-1| = x + 2 \ln(1-x),$$

pour laquelle $\exp(-A(x)) = \frac{e^{-x}}{(1-x)^2}$, ainsi :

$$\mathcal{S}(H, I) = \left\{ \begin{array}{l}]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto A \frac{e^{-x}}{(1-x)^2} \end{array} ; A \in \mathbb{R} \right\}.$$

La fonction S appartient à cet ensemble ; puisque $S(0) = a_0 = 1$, pour cette fonction, $A = 1$.

Conclusion : $\forall x \in]-1, 1[, S(x) = \frac{e^{-x}}{(1-x)^2}$.

4) a. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (n-k+1).$$

Solution. Pour trouver les coefficients a_n , on développe en série entière l'expression de $S(x)$ que l'on vient de trouver :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[: S(x) &= e^{-x} \times \frac{1}{(1-x)^2} = e^{-x} \times \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^\infty \frac{(-x)^n}{n!} \right) \times \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^\infty x^n \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} x^n \right) \times \left(\sum_{n=1}^\infty n x^{n-1} \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} x^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^\infty (n+1) x^n \right). \end{aligned}$$

Les séries entières intervenant ci-dessus ont toutes les deux un rayon de convergence d'au moins 1 ; sur $]-1, 1[$, le produit de leurs sommes est égal à la somme de leur produit de Cauchy :

$$\forall x \in]-1, 1[: S(x) = \sum_{n=0}^\infty c_n x^n \text{ pour } c_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (n-k+1).$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (n-k+1).$$

b. Déterminer un équivalent de a_n quand $n \rightarrow \infty$.

Solution. Quand $n \rightarrow \infty$ dans l'expression précédente, écrivons :

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (n-k+1) \\ &= n \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{s_n}. \end{aligned}$$

On conjecture que :

$$s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1};$$

montrons-le en majoration l'écart entre les deux.

$$\begin{aligned} |s_n - e^{-1}| &= \left| \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right| \\ &= \left| -\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \frac{k-1}{n} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{(k-1)}{k!} + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right|. \end{aligned}$$

La première somme est la somme partielle de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n-1}{n!}$,

qui est convergente. Cette quantité est donc bornée ; divisée par n , elle tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.

La seconde somme est le reste de la série convergente définissant e^{-1} : elle tend également vers 0.

Par le théorème d'encadrement, tout cela prouve notre conjecture :

$$s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1} \quad \text{et donc} \quad s_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{e}.$$

Conclusion : Par produit d'équivalents : $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n}{e}$.

■ Exercice mineur

On lance successivement un dé à 6 faces équilibré et on arrête les lancers quand on a obtenu chaque chiffre au moins un fois.

On note N le nombre total de lancers effectués (quand tous les chiffres ont été obtenus) et X_2 le nombre de lancers nécessaires, en plus du premier, pour obtenir un résultat différent de celui du premier lancer.

1) Soit $k \geq 2$. Lors du k -ième lancer, quelle est la probabilité d'obtenir un résultat différent de celui du premier lancer ?

Solution. Notons D_i le résultat du dé au i^e lancer.

Les variables D_i sont i.i.d. de loi uniforme sur $\llbracket 1, 6 \rrbracket$.

Pour $k \geq 2$, on cherche donc $P(D_k \neq D_1)$.

On applique la **formule des probabilités totales** sur le s.c.e. engendré par D_1 :

$$\begin{aligned} P(D_k \neq D_1) &= \sum_{i=1}^6 P([D_1 = i] \cap [D_k \neq D_1]) \\ &= \sum_{i=1}^6 P([D_1 = i] \cap [D_k \neq i]) \\ &= \sum_{i=1}^6 P(D_1 = i) P(D_k \neq i) \quad (D_1 \perp\!\!\!\perp D_k \text{ car } k \neq 1) \\ &= \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \quad (\text{car } D_1, D_k \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)) \\ &= \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

2) Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance.

Solution. X_2 donne le rang du premier succès dans une succession illimitée d'épreuves de Bernoulli (le résultat du lancer est-il différent du résultat du premier lancer ?) mutuellement indépendantes et de probabilité de succès constante égale à $\frac{5}{6}$.

On en déduit que $X_2 \hookrightarrow \mathcal{G}(5/6)$.

Immédiatement : $E(X_2) = \frac{1}{5/6} = \frac{6}{5}$.

3) Déterminer l'espérance de N .

Solution. On définit de manière analogue les variables X_3 à X_6 (nombres de lancers supplémentaires à effectuer pour obtenir le $3^e/4^e/5^e/6^e$ résultat distinct).

Ainsi : $N = 1 + X_2 + X_3 + \dots + X_6$.

Comme pour X_2 , on montre que les variables X_k pour $k \geq 3$ suivent des lois géométriques de paramètres $4/6, 3/6, 2/6$ et $1/6$. Puisque toutes les X_k sont d'espérance finie, par linéarité de l'espérance, N également et :

$$\begin{aligned} E(N) &= E(1 + X_2 + X_3 + \dots + X_6) \\ &= 1 + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} + \frac{6}{1} \\ &= 1 + 1,2 + 1,5 + 2 + 3 + 6 \\ &= 14,7. \end{aligned}$$

Il faut en moyenne 14,7 lancers d'un dé à 6 faces pour obtenir toutes les faces du dé au moins une fois.