

# Planches Mines-Télécom : corrigés A-D

## Mines-Télécom • Planche A

### ■ Exercice n° 1

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left( n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{n^2}.$$

Déterminer  $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

**Solution.** On écrit :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \exp\left[ n^2 \ln\left( n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right].$$

On effectue un DL à deux termes de l'argument du logarithme :

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\text{donc :} \quad n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = n \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \\ = 1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right);$$

$$\text{puis :} \quad \ln\left( n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \ln\left( 1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{6n^2},$$

$$\text{d'où :} \quad n^2 \ln\left( n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{n^2}{6n^2} = -\frac{1}{6} \\ \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\frac{1}{6}.$$

Finalement, par composition de limites avec  $\exp(x) \xrightarrow[x \rightarrow -1/6]{} e^{-1/6}$  :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-1/6}.$$

### ■ Exercice n° 2

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \geq 1$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ .

On considère l'endomorphisme  $u$  de  $E$  défini par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad u(e_i) = e_{i+1} \quad \text{et} \quad u(e_n) = e_1.$$

1) Dans les cas  $n = 2$  et  $n = 3$ , montrer que  $u$  est une isométrie et la caractériser géométriquement.

**Solution.** Dans les cas  $n = 2$  et  $n = 3$  les matrices de  $u$  sont respectivement

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces matrices sont clairement orthogonales (leurs colonnes sont orthonormées) et comme  $\mathcal{B}$  est une base orthonormée,  $u$  est dans ces deux cas une isométrie.

• Pour  $n = 2$  :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & \sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & -\cos(\pi/2) \end{pmatrix}.$$

donc on reconnaît la matrice de la réflexion d'axe  $\Delta$  incliné de  $\theta/2 = \pi/4$  par rapport au vecteur  $\vec{e}_x$ , autrement dit la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$ .

• Pour  $n = 3$ , après avoir vu que  $M_3 \in O(3)$  (donc que  $u$  est une isométrie), on voit que  $\det(M_3) = +1$ , donc  $u$  est une rotation. Son axe est  $E_1(M_3)$  et comme :

$$M_3 - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad C_1 + C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

l'axe est dirigé par  $\vec{n} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Son angle  $\theta$  vérifie  $1 + 2 \cos(\theta) = \text{tr}(M_3) = 0$ , donc  $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$ , d'où  $\theta \equiv \pm \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$ .

Pour trouver son signe, on prend le vecteur  $\vec{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  orthogonal à l'axe, et on observe :

$$\vec{v} \wedge u(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = +\vec{n},$$

donc l'angle de la rotation est  $\theta = +\frac{2\pi}{3}$ .

**Conclusion :**  $u$  est la rotation d'axe dirigé par  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et d'angle  $\theta = +\frac{2\pi}{3}$ .

2) Dans le cas général,  $u$  est-il une isométrie ?

Si oui, préciser si elle est directe ou indirecte.

**Solution.** Dans le cas général, la matrice de  $u$  dans la base orthonormée  $\mathcal{B}$  s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{(n)}$$

Les colonnes de cette matrice sont clairement orthonormées, donc  $M \in O_n(\mathbb{R})$  et  $u$  est une isométrie.

Ensuite, en développant le déterminant de  $M$  par rapport à la première ligne :

$$\det(M) = (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}.$$

$u$  est donc une isométrie directe quand  $n$  est impair, et indirecte quand  $n$  est pair.

On suppose à présent que  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ , que  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$  et que  $u$  est défini comme précédemment.

3) Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Déterminer le rang de  $u - \lambda \text{id}_E$ .

L'endomorphisme  $u$  est-il diagonalisable ?

**Solution.**

• Le rang de  $u - \lambda \text{id}_E$  est le rang de sa matrice dans la base  $\mathcal{B}$  :

$$M - \lambda I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & (0) & & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & -\lambda & \\ (0) & & 1 & -\lambda \end{pmatrix}_{(n)}$$

Ce rang est supérieure ou égal à celui de la matrice obtenue en rayant 1<sup>re</sup> ligne et dernière colonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -\lambda \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{(n-1)}$$

matrice triangulaire de déterminant 1, donc inversible, donc de rang  $(n-1)$ .

Ainsi,  $\text{rg}(u - \lambda \text{id}_E) \geq n-1$ .

Rappelons que  $\text{rg}(u - \lambda \text{id}_E) = n$  si et seulement si  $\det(u - \lambda \text{id}_E) \neq 0$ .

Le calcul de ce déterminant (...) donne  $\lambda^n - 1$ , donc  $\text{rg}(u - \lambda \text{id}_E) = n$  si et seulement si  $\lambda^n \neq 1$ .

**Conclusion.**  $\text{rg}(u - \lambda \text{id}_E) = \begin{cases} n & \text{si } \lambda^n \neq 1, \\ n-1 & \text{si } \lambda^n = 1. \end{cases}$

- D'après ce qui précède, les valeurs propres de  $u$  sont exactement les complexes  $\lambda$  tels que  $\lambda^n = 1$ . Il s'agit des racines  $n^{\text{e}}$  de l'unité. Comme il y en a  $n$  distinctes et que  $\dim(E) = n$ , cela suffit pour prouver que  $u$  est diagonalisable.

Soit  $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$  et  $A$  la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

#### 4) Exprimer la matrice $A$ à l'aide du polynôme $P$ et d'une matrice plus simple.

La matrice  $A$  est-elle diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  ? sur  $\mathbb{R}$  ?

**Solution.** Toujours avec  $M$ , la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ , on remarque que :

$$\begin{aligned} A &= a_0 I_n + a_1 M + a_2 M^2 + \cdots + a_{n-1} M^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k M^k \\ &= P(M). \end{aligned}$$

Puisque que  $M$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  avec pour valeurs propres les racines  $n^{\text{e}}$  de l'unité, il existe une matrice  $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  telle que :

$$M = Q \underbrace{\text{diag}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})}_D Q^{-1} \quad \text{où } \omega := e^{i2\pi/n}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} A &= P(M) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k M^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (Q D Q^{-1})^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k Q D^k Q^{-1} \\ &= Q \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k \right) Q^{-1} \\ &= Q \text{diag} \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k 1^k, \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^k, \dots, \sum_{k=0}^{n-1} a_k (\omega^{n-1})^k \right) Q^{-1} \\ &= Q \text{diag} (P(1), P(\omega), \dots, P(\omega^{n-1})) Q^{-1}. \end{aligned}$$

Ceci montre que  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  et que ses valeurs propres sont les  $P(\omega^k)$  pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ .

Pour que  $A$  soit diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  :

- il est nécessaire que  $A$  soit réelle, donc que les  $a_k$  soient tous réels, et que  $A$  n'admette pas de valeur propre complexe non réelle. Il faut donc que tous les  $P(\omega^k)$  soient réels.
- réciproquement, si les  $a_k$  et les  $P(\omega^k)$  sont tous réels,  $A$  est semblable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  à une matrice  $D$  diagonale réelle.

**On peut démontrer (mais ce n'est pas immédiat) que  $A$  est également semblable à  $D$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .** On prouve ainsi que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .

**Conclusion.**  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  si et seulement si tous les  $a_k$  et tous les  $P(\omega^k)$  sont réels.

### Mines-Télécom • Planché B

#### ■ Exercice n° 1

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que

$$A^3 + A^2 + A = 0.$$

Démontrer que  $\text{tr}(A) \in \mathbb{Z}$ .

**Solution.** Le polynôme  $P := X^3 + X^2 + X$  est annulateur de  $A$ . Pour le factoriser dans  $\mathbb{C}$ , on mobilise les racines cubiques de l'unité :

$$\begin{aligned} P &= X \times (X^2 + X + 1) \\ &= X \times \frac{X^3 - 1}{X - 1} \\ &= X \times \frac{(X-1)(X-j)(X-j^2)}{X-1} \quad (\text{où } j := e^{i2\pi/3}) \\ &= X(X-j)(X-j^2). \end{aligned}$$

On en déduit que les valeurs propres complexes de  $A$  se trouvent parmi  $0, j, j^2$  :

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0, j, j^2\}.$$

Le polynôme caractéristique  $\chi_A$  est scindé dans  $\mathbb{C}$  et ses racines se trouvent parmi  $0, j, j^2$ ; comme il est unitaire, il se factorise sous la forme :

$$\chi_A(X) = X^a (X-j)^b (X-j^2)^c \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{N}.$$

(noter que  $a, b$  ou  $c$  peuvent s'annuler si jamais le complexe correspondant n'est pas racine de  $\chi_A$ )

Comme  $A$  est une matrice réelle, ses racines complexes sont conjuguées, et deux racines conjuguées ont même ordre de multiplicité.

Puisque  $j^2 = \bar{j}$ , on a  $b = c$ .

Le degré de  $\chi_A$  est égal à la taille de  $A$ , soit  $n$ .

On en déduit que :

$$\chi_A(X) = X^{n-2a} (X-j)^a (X-j^2)^a.$$

Puisque  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{C}$ , la trace de  $A$  est la somme des valeurs propres de  $A$  répétées selon leur ordre :

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= (n-2a) \cdot 0 + a \cdot j + a \cdot j^2 \\ &= a \cdot (j + \bar{j}) \\ &= 2a \text{Re}(j) = -a \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

#### ■ Exercice n° 2

Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$  et  $g$  la fonction définie sur  $D$  par :

$$g(x, y) = \begin{cases} xy \ln(x^2 + y^2) & \text{si } 0 < x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

#### 1) Montrer que la fonction $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overset{\circ}{D}$ .

**Solution.** Posons  $\Omega := \overset{\circ}{D} \setminus \{(0, 0)\}$ , qui est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

##### 1) Montrons que $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$ .

Par les théorèmes opératoires :

- \*  $g_1 : (x, y) \mapsto xy$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$  (fonction polynomiale);
- \*  $g_2 : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$  aussi, et prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$ ;
- \*  $\ln : t \mapsto \ln(t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  (fonction usuelle);
- \*  $g_3 := \ln \circ g_2 : (x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^2)$  est donc de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ ;
- \* et finalement  $g = g_1 \times g_3$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ .

##### 2) Étudions les dérivées partielles de $g$ en $(0, 0)$ .

Par rapport à  $x$  : pour tout  $t$  non nul au voisinage de 0,

$$\frac{g(t, 0) - g(0, 0)}{t} = \frac{0 - 0}{t} = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0, \quad \text{limite finie.}$$

Ainsi,  $\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0)$  existe et vaut 0.

On montre de même que  $\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

**3) Montrons que les dérivées partielles sont continues sur  $\Omega$ .**

Sur  $\Omega$ , cela a été fait à la première étape; reste la continuité en  $(0, 0)$ . Or :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (x y \ln(x^2 + y^2)) \\ &= y \ln(x^2 + y^2) + x y \frac{2x}{x^2 + y^2} \\ &= y \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Montrons que  $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0)$  en utilisant les coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \Omega : \\ \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) \right| \\ &= \left| y \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \\ &= \left| r \sin(\theta) \ln(r^2) + \frac{2r^3 \cos^2(\theta) \sin(\theta)}{r^2} \right| \\ &\leq 2 |r \ln(r)| + 2r \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} 0. \end{aligned}$$

La dérivée partielle  $\frac{\partial g}{\partial x}$  est bien continue en  $(0, 0)$ .

On montre de même que  $\frac{\partial g}{\partial y}$  l'est aussi.

**Conclusion :**  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur la totalité de  $\overset{\circ}{D}$ .

**2) Montrer que  $g$  admet des extrema globaux sur  $D$ .**

**Solution.**

- L'ensemble  $D$  est la boule unité de  $\mathbb{R}^2$  pour la norme euclidienne.

Montrons que  $g$  est continue sur  $D$  :

- $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\overset{\circ}{D}$  donc elle y est continue.
- Si  $(x_0, y_0)$  est un point de la frontière de  $D$  (autrement dit, si  $x_0^2 + y_0^2 = 1$ ),  $g(x, y) = x y \ln(x^2 + y^2)$  au voisinage de  $(x_0, y_0)$ .

Par les théorèmes d'opérations sur les limites :

$$g(x, y) = x y \ln(x^2 + y^2) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x_0 y_0 \ln(x_0^2 + y_0^2) = g(x_0, y_0)$$

donc  $g$  est continue au point  $(x_0, y_0)$ .

- La fonction  $g$  est continue sur un fermé borné d'un EVN de dimension finie, à valeurs réelles. Par le théorème des bornes atteintes, elle admet un minimum et un maximum

**3)  $g$  admet-elle un extremum local en  $(0, 0)$  ?**

**Solution.**

**Remarque.** La question se pose car on a vu que  $\nabla g(0, 0) = (0, 0)$  :  $(0, 0)$  est un **point critique** de  $g$ .

En  $\omega := (0, 0)$ , la fonction  $g$  vaut 0. Remarquons que, pour tout  $t \in ]0, 1[$  :

$$g(t, t) - g(\omega) = t^2 \ln(2t^2) < 0$$

$$g(t, -t) - g(\omega) = -t^2 \ln(2t^2) > 0.$$

Dans tout voisinage de  $\omega = (0, 0)$ , on trouve donc des points  $m^+$  tels que  $g(m^+) > g(\omega)$ , et des points  $m^-$  tels que  $g(m^-) < g(\omega)$ . On en déduit qu'en  $\omega$ ,  $g$  n'admet pas d'extremum local.

**4) Les extrema globaux sont-ils atteints sur le bord de  $D$  ?**

**Solution.** Le bord  $\partial D$  de  $D$  est le cercle de centre  $\omega = (0, 0)$  et de rayon 1, où  $x^2 + y^2 = 1$ . Pour tout  $m \in \partial D$ ,  $g(m) = 0$ ; comme par ailleurs la fonction  $g$  prend des valeurs  $> 0$  et des valeurs  $< 0$ , elle ne peut pas atteindre ses extrema globaux sur  $\partial D$ .

**Mines-Télécom • Planche C**

**■ Exercice n° 1**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \in ]0, 1[$ .

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi binomiale de pa-

ramètres  $n, p$ .

Soit  $Y$  une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $[[1, n]]$ .

On suppose  $X$  et  $Y$  indépendantes.

Soit  $Z$  la variable aléatoire définie par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } X(\omega) \neq 0, \\ Y(\omega) & \text{si } X(\omega) = 0. \end{cases}$$

Trouver la loi de  $Z$ , puis son espérance.

**Solution.**

**1) Loi de  $Z$**

- Quand  $X$  est non nulle, la variable  $Z$  prend la même valeur que  $X$ . Puisque  $X(\Omega) = [[0, n]]$ , il s'agit dans ce cas d'une valeur de  $[[1, n]]$ .

Quand  $X$  est nulle, la variable  $Z$  prend la même valeur que  $Y$ . Comme  $Y(\Omega) = [[1, n]]$ , il s'agit encore d'une valeur de  $[[1, n]]$ .

Ainsi :  $Z(\Omega) \subset [[1, n]]$ .

- Prenons  $k \in [[1, n]]$  et calculons  $P(Z = k)$  en appliquant la formule des probabilités totales sur le s.c.e.  $([X \neq 0], [X = 0])$  :

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(X \neq 0) P_{[X \neq 0]}(Z = k) \\ &\quad + P(X = 0) P_{[X = 0]}(Z = k) \\ &= P(X \neq 0) P_{[X \neq 0]}(X = k) \\ &\quad + P(X = 0) P_{[X = 0]}(Y = k). \end{aligned}$$

Puisque  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ , en notant  $q := 1 - p$  :

$$P(X = 0) = q^n \quad \text{et} \quad P(X \neq 0) = 1 - q^n.$$

Calculons maintenant les 2 probabilités conditionnelles :

$$\begin{aligned} P_{[X \neq 0]}(X = k) &= \frac{P(X = k, X \neq 0)}{P(X \neq 0)} \\ &= \frac{P(X = k)}{P(X \neq 0)} \quad (\text{car } k \neq 0) \\ &= \frac{1}{1 - q^n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}. \quad (X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)) \end{aligned}$$

Pour la seconde, puisque  $X \perp\!\!\!\perp Y$  :

$$P_{[X = 0]}(Y = k) = P(Y = k) = \frac{1}{n}$$

car  $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$  et  $k \in [[1, n]]$ .

**Conclusion :** La loi de  $Z$  est donnée par :

$$\begin{cases} Z(\Omega) \subset [[1, n]] \\ \forall k \in [[1, n]] : P(Z = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \frac{q^n}{n}. \end{cases}$$

**2) Espérance de  $Z$**

La variable  $Z$  est finie, à valeurs réelles, donc elle admet une espérance (dans  $\mathbb{R}$ ).

Par définition, il s'agit de :

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{k=1}^n k P(Z = k) \\ &= \sum_{k=1}^n k \left( \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \frac{q^n}{n} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \frac{q^n}{n} \sum_{k=1}^n k \end{aligned}$$

On reconnaît l'expression définissant  $E(X)$  dans la première somme :

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(X) + \frac{q^n}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= np + \frac{n+1}{2} q^n. \end{aligned}$$

**■ Exercice n° 2**

On pose  $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ .

1) Montrer que  $A$  est diagonalisable et donner tous ses sous-espaces propres.

**Solution.**  $\chi_A = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A)$   
 $= X^2 + 7X - 8$   
 $= (X - 1)(X + 8),$

scindé à racines simples, ce qui suffit pour affirmer que  $A$  est diagonalisable.

De plus,  $\text{Sp}(A) = \{1, -8\}$ ; les sous-espaces propres sont des droites et il suffit de trouver un vecteur propre pour chacun. Or :

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } A + 8I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{où : } C_1 + 2C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } C_1 - C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in E_1 \text{ et } V_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_{-8}.$$

**Conclusion :** Les sous-espaces propres de  $A$  sont :

$E_1 = \text{Vect}(V_1)$  pour  $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$   
 et  $E_{-8} = \text{Vect}(V_2)$  pour  $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

2) Montrer qu'il existe une matrice  $B$  telle que  $B^3 = A$ .

**Solution.** D'après la question précédente :

$$A = P D P^{-1} \text{ pour } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $\Delta := \text{diag}(1, -2)$  vérifie manifestement

$$\Delta^3 = \text{diag}(1, 8) = D.$$

Si l'on pose  $B := P \Delta P^{-1}$ , on obtient :

$$B^3 = (P \Delta P^{-1})^3 = P \Delta^3 P^{-1} = P D P^{-1} = A.$$

**Conclusion :** On a trouvé une matrice  $B$  telle que  $B^3 = A$ .

3) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t).$$

**Solution.** Soit  $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ , où  $x$  et  $y$  sont deux fonctions dérivables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour résoudre le système différentiel proposé, on utilise la réduction de  $A$  trouvée précédemment :

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) \iff \frac{dX(t)}{dt} = P D P^{-1} X(t)$$

$$\iff P^{-1} \frac{dX(t)}{dt} = D P^{-1} X(t)$$

$$\iff \frac{d}{dt} (P^{-1} X(t)) = D (P^{-1} X(t))$$

car  $P^{-1}$  est une matrice constante, indépendante de  $t$ .

Posons  $Y : t \mapsto P^{-1} X(t)$ , dont nous noterons les composantes  $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ . Alors :

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t)$$

$$\iff \frac{dY(t)}{dt} = D Y(t)$$

$$\iff \begin{cases} u'(t) = u(t) \\ v'(t) = -8v(t) \end{cases}$$

$$\iff \exists C_1, C_2 \in \mathbb{R} / \forall t \in \mathbb{R} : \begin{cases} u(t) = C_1 e^t \\ v(t) = C_2 e^{-8t} \end{cases}$$

Puisque  $X(t) = P Y(t) = P \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$  et que les colonnes de  $P$  sont les vecteurs  $V_1$  et  $V_2$  :

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t)$$

$$\iff \exists C_1, C_2 \in \mathbb{R} / \forall t \in \mathbb{R} :$$

$$X(t) = C_1 e^t V_1 + C_2 e^{-8t} V_2.$$

$$= C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-8t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Mines-Télécom • Planche D

■ Exercice n° 1

Trois joueurs  $A, B, C$  se font des passes avec une balle.

Le joueur  $A$  lance de façon équiprobable la balle à  $B$  ou  $C$ , de même que  $C$  lance la balle de façon équiprobable à  $A$  ou  $B$ ; mais  $B$  lance toujours la balle à  $C$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $a_n$  la probabilité que  $A$  ait la balle après  $n$  passes, et on définit  $b_n$  et  $c_n$  de la même manière.

On pose  $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ .

1) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_{n+1} = AX_n$ , où :

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** On note  $A_n$  (resp.  $B_n, C_n$ ) l'événement « à l'instant  $n$ , le joueur  $A$  (resp.  $B, C$ ) a la balle », pour  $n \in \mathbb{N}$ .

Fixons  $n \in \mathbb{N}$ . Comme à l'instant  $n$ , un joueur et un seul détient la balle,  $(A_n, B_n, C_n)$  est un système complet d'événements.

Appliquons la formule des probabilités totales sur ce s.c.e. pour évaluer  $P(A_{n+1}), P(B_{n+1})$  et  $P(C_{n+1})$  :

$$P(A_{n+1}) = P(A_n) \underbrace{P_{A_n}(A_{n+1})}_{=0} + P(B_n) \underbrace{P_{B_n}(A_{n+1})}_{=0} + P(C_n) \underbrace{P_{C_n}(A_{n+1})}_{=1/2}$$

$$= \frac{1}{2} c_n ;$$

$$P(B_{n+1}) = P(A_n) \underbrace{P_{A_n}(B_{n+1})}_{=1/2} + P(B_n) \underbrace{P_{B_n}(B_{n+1})}_{=0} + P(C_n) \underbrace{P_{C_n}(B_{n+1})}_{=1/2}$$

$$= \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} c_n ;$$

$$P(C_{n+1}) = P(A_n) \underbrace{P_{A_n}(C_{n+1})}_{=1/2} + P(B_n) \underbrace{P_{B_n}(C_{n+1})}_{=1} + P(C_n) \underbrace{P_{C_n}(C_{n+1})}_{=0}$$

$$= \frac{1}{2} a_n + b_n.$$

On en déduit :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} c_n \\ \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} c_n \\ \frac{1}{2} a_n + b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$= AX_n.$$

2) Montrer que la matrice  $A$  est semblable à :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** Soit  $f : V \in \mathbb{R}^3 \mapsto AV \in \mathbb{R}^3$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ .

Pour montrer que  $A \stackrel{\sim}{\sim} T$ , on cherche une base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = T$ .

• **Analyse.** Supposons qu'on ait trouvé une telle base  $\mathcal{B}$ . En lisant les colonnes de la matrices, on obtient :

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 \\ f(e_2) = -\frac{1}{2} e_2 \\ f(e_3) = e_2 - \frac{1}{2} e_3 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} A e_1 = e_1 \\ A e_2 = -\frac{1}{2} e_2 \\ A e_3 = e_2 - \frac{1}{2} e_3 \end{cases}$$

En particulier  $e_1$  est vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre 1, et  $e_2$  pour la valeur propre  $-\frac{1}{2}$ .

• **Synthèse.**

\* Cherchons les vecteurs propres de  $A$  désirés :

$$A - I_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad A + \frac{1}{2} I_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans la première matrice :  $2C_1 + 3C_2 + 4C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc  $e_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in E_1(A)$ ;

Dans la seconde :  $C_1 - C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc  $e_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_{-1/2}(A)$ .

\* Cherchons un vecteur  $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  tel que  $(A + \frac{1}{2} I_3) V = e_2$  :

$$\begin{aligned} (A + \frac{1}{2} I_3) V &= e_2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 2 \\ x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = -2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = -2 \\ y = -2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ z = 2 - x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} & \end{aligned}$$

En prenant  $x = 0$ , le vecteur  $e_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$  convient.

\* Vérifions maintenant que  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(e_1, e_2, e_3) &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \neq 0. \end{aligned}$$

### 3) Déterminer la limite de la suite $(T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Solution.** On écrit :

$$T = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}}_D + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_N,$$

et on constate que  $N^2 = 0_3$ , d'où il vient immédiatement :  $\forall k \geq 2 : N^k = 0_3$ .

De plus,  $DN = ND$ , ce qui permet d'appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1 : T^n &= (D + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\ &= D^n + n D^{n-1} N + 0_3 + \dots + 0_3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1/2)^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1/2)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/2)^n & n (-1/2)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-1/2)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En prenant la limite de chacune des 9 coordonnées (CC pour la coordonnée en position (2,3)), on obtient :

$$T^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### ■ Exercice n° 2

Soit  $\theta \in ]0, \pi[$  et  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sin(k\theta) x^k$ .

### 1) Montrer par l'absurde que la suite :

$$(u_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\sin(k\theta))_{k \in \mathbb{N}}$$

ne converge pas vers 0.

**Solution.** Par l'absurde, supposons que  $u_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ .

Alors la suite extraite  $(u_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$  tend également vers 0 :

$$\sin((k+1)\theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Or, grâce à la formule d'addition :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sin((k+1)\theta) = \sin(k\theta) \cos(\theta) + \cos(k\theta) \sin(\theta).$$

Comme  $\theta \neq 0 [\pi]$ , on a  $\sin(\theta) \neq 0$ , ce qui permet d'isoler  $\cos(k\theta)$ ; pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \cos(k\theta) &= \frac{1}{\sin(\theta)} (\sin((k+1)\theta) - \sin(k\theta) \cos(\theta)) \\ &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\sin(\theta)} (0 - 0 \cdot \cos(\theta)) = 0. \end{aligned}$$

Mais alors :

$$\cos^2(k\theta) + \sin^2(k\theta) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0^2 + 0^2 = 0,$$

ce qui **contredit** le fait que  $\cos^2(k\theta) + \sin^2(k\theta)$  est constant égal à 1.

C'est donc que la suite  $(\sin(k\theta))_{k \in \mathbb{N}}$  ne tend pas vers 0.

### 2) Déterminer le rayon de convergence $R$ de la série entière dont la somme est $f$ .

**Solution.** En  $x = 1$ , la suite  $(\sin(k\theta) 1^k)_{k \in \mathbb{N}} = (u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  :

- est bornée, donc  $R \geq 1$ ;
- ne tend pas vers 0, donc  $R \leq 1$ .

Ainsi,  $R = 1$ .

### 3) Calculer $f(x)$ pour tout réel $x \in ]-R, R[$ .

**Solution.** Soit  $x \in ]-1, 1[$ . Remarquons que :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad \sin(k\theta) x^k &= \text{Im}(e^{ik\theta} x^k) \\ &= \text{Im}(e^{ik\theta} x^k) \quad (\text{car } x^k \in \mathbb{R}) \\ &= \text{Im}((x e^{i\theta})^k). \end{aligned}$$

La série géométrique complexe  $\sum_{k \geq 0} (x e^{i\theta})^k$  est convergente car  $|x e^{i\theta}| = |x| < 1$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sin(k\theta) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \text{Im}((x e^{i\theta})^k) = \text{Im} \left( \sum_{k=0}^{\infty} (x e^{i\theta})^k \right) \\ &= \text{Im} \left( \frac{1}{1 - x e^{i\theta}} \right) \\ &= \text{Im} \left( \frac{1}{(1 - x \cos \theta) - i x \sin \theta} \right) \\ &= \text{Im} \left( \frac{(1 - x \cos \theta) + i x \sin \theta}{(1 - x \cos \theta)^2 + (x \sin \theta)^2} \right) \\ &= \frac{x \sin \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2}. \end{aligned}$$