

# Planches Mines-Télécom : corrigés A-G

## Mines-Télécom • Planche A

### ■ Exercice n° 1

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left( n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{n^2}.$$

Déterminer  $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

**Solution.** On écrit :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \exp\left[ n^2 \ln\left( n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right].$$

On effectue un DL à deux termes de l'argument du logarithme :

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\text{donc :} \quad n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = n \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \\ = 1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right);$$

$$\text{puis :} \quad \ln\left( n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \ln\left( 1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{6n^2},$$

$$\text{d'où :} \quad n^2 \ln\left( n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{n^2}{6n^2} = -\frac{1}{6} \\ \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\frac{1}{6}.$$

Finalement, par composition de limites avec  $\exp(x) \xrightarrow[x \rightarrow -1/6]{} e^{-1/6}$  :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-1/6}.$$

### ■ Exercice n° 2

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \geq 1$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ .

On considère l'endomorphisme  $u$  de  $E$  défini par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad u(e_i) = e_{i+1} \quad \text{et} \quad u(e_n) = e_1.$$

1) Dans les cas  $n = 2$  et  $n = 3$ , montrer que  $u$  est une isométrie et la caractériser géométriquement.

**Solution.** Dans les cas  $n = 2$  et  $n = 3$  les matrices de  $u$  sont respectivement

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces matrices sont clairement orthogonales (leurs colonnes sont orthonormées) et comme  $\mathcal{B}$  est une base orthonormée,  $u$  est dans ces deux cas une isométrie.

• Pour  $n = 2$  :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & \sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & -\cos(\pi/2) \end{pmatrix}.$$

donc on reconnaît la matrice de la réflexion d'axe  $\Delta$  incliné de  $\theta/2 = \pi/4$  par rapport au vecteur  $\vec{e}_x$ , autrement dit la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$ .

• Pour  $n = 3$ , après avoir vu que  $M_3 \in O(3)$  (donc que  $u$  est une isométrie), on voit que  $\det(M_3) = +1$ , donc  $u$  est une rotation. Son axe est  $E_1(M_3)$  et comme :

$$M_3 - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad C_1 + C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

l'axe est dirigé par  $\vec{n} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Son angle  $\theta$  vérifie  $1 + 2 \cos(\theta) = \text{tr}(M_3) = 0$ , donc  $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$ , d'où  $\theta \equiv \pm \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$ .

Pour trouver son signe, on prend le vecteur  $\vec{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  orthogonal à l'axe, et on observe :

$$\vec{v} \wedge u(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = +\vec{n},$$

donc l'angle de la rotation est  $\theta = +\frac{2\pi}{3}$ .

**Conclusion :**  $u$  est la rotation d'axe dirigé par  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et d'angle  $\theta = +\frac{2\pi}{3}$ .

2) Dans le cas général,  $u$  est-il une isométrie ?

Si oui, préciser si elle est directe ou indirecte.

**Solution.** Dans le cas général, la matrice de  $u$  dans la base orthonormée  $\mathcal{B}$  s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{(n)}$$

Les colonnes de cette matrice sont clairement orthonormées, donc  $M \in O_n(\mathbb{R})$  et  $u$  est une isométrie.

Ensuite, en développant le déterminant de  $M$  par rapport à la première ligne :

$$\det(M) = (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}.$$

$u$  est donc une isométrie directe quand  $n$  est impair, et indirecte quand  $n$  est pair.

On suppose à présent que  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ , que  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$  et que  $u$  est défini comme précédemment.

3) Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Déterminer le rang de  $u - \lambda \text{id}_E$ .

L'endomorphisme  $u$  est-il diagonalisable ?

**Solution.**

• Le rang de  $u - \lambda \text{id}_E$  est le rang de sa matrice dans la base  $\mathcal{B}$  :

$$M - \lambda I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & (0) & & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & -\lambda & \\ (0) & & 1 & -\lambda \end{pmatrix}_{(n)}$$

Ce rang est supérieure ou égal à celui de la matrice obtenue en rayant 1<sup>re</sup> ligne et dernière colonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -\lambda \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{(n-1)}$$

matrice triangulaire de déterminant 1, donc inversible, donc de rang  $(n-1)$ .

Ainsi,  $\text{rg}(u - \lambda \text{id}_E) \geq n-1$ .

Rappelons que  $\text{rg}(u - \lambda \text{id}_E) = n$  si et seulement si  $\det(u - \lambda \text{id}_E) \neq 0$ .

Le calcul de ce déterminant (...) donne  $\lambda^n - 1$ , donc  $\text{rg}(u - \lambda \text{id}_E) = n$  si et seulement si  $\lambda^n \neq 1$ .

**Conclusion.**  $\text{rg}(u - \lambda \text{id}_E) = \begin{cases} n & \text{si } \lambda^n \neq 1, \\ n-1 & \text{si } \lambda^n = 1. \end{cases}$

- D'après ce qui précède, les valeurs propres de  $u$  sont exactement les complexes  $\lambda$  tels que  $\lambda^n = 1$ . Il s'agit des racines  $n^{\text{e}}$  de l'unité. Comme il y en a  $n$  distinctes et que  $\dim(E) = n$ , cela suffit pour prouver que  $u$  est diagonalisable.

Soit  $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$  et  $A$  la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

#### 4) Exprimer la matrice $A$ à l'aide du polynôme $P$ et d'une matrice plus simple.

La matrice  $A$  est-elle diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ ? sur  $\mathbb{R}$ ?

**Solution.** Toujours avec  $M$ , la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ , on remarque que :

$$\begin{aligned} A &= a_0 I_n + a_1 M + a_2 M^2 + \cdots + a_{n-1} M^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k M^k \\ &= P(M). \end{aligned}$$

Puisque que  $M$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  avec pour valeurs propres les racines  $n^{\text{e}}$  de l'unité, il existe une matrice  $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  telle que :

$$M = Q \underbrace{\text{diag}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})}_D Q^{-1} \quad \text{où } \omega := e^{i2\pi/n}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} A &= P(M) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k M^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (Q D Q^{-1})^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k Q D^k Q^{-1} \\ &= Q \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k \right) Q^{-1} \\ &= Q \text{diag} \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k 1^k, \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^k, \dots, \sum_{k=0}^{n-1} a_k (\omega^{n-1})^k \right) Q^{-1} \\ &= Q \text{diag} (P(1), P(\omega), \dots, P(\omega^{n-1})) Q^{-1}. \end{aligned}$$

Ceci montre que  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  et que ses valeurs propres sont les  $P(\omega^k)$  pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ .

Pour que  $A$  soit diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  :

- il est nécessaire que  $A$  soit réelle, donc que les  $a_k$  soient tous réels, et que  $A$  n'admette pas de valeur propre complexe non réelle. Il faut donc que tous les  $P(\omega^k)$  soient réels.
- réciproquement, si les  $a_k$  et les  $P(\omega^k)$  sont tous réels,  $A$  est semblable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  à une matrice  $D$  diagonale réelle.

**On peut démontrer (mais ce n'est pas immédiat) que  $A$  est également semblable à  $D$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .** On prouve ainsi que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .

**Conclusion.**  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  si et seulement si tous les  $a_k$  et tous les  $P(\omega^k)$  sont réels.

### Mines-Télécom • Planché B

#### ■ Exercice n° 1

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que

$$A^3 + A^2 + A = 0.$$

Démontrer que  $\text{tr}(A) \in \mathbb{Z}$ .

**Solution.** Le polynôme  $P := X^3 + X^2 + X$  est annulateur de  $A$ . Pour le factoriser dans  $\mathbb{C}$ , on mobilise les racines cubiques de l'unité :

$$\begin{aligned} P &= X \times (X^2 + X + 1) \\ &= X \times \frac{X^3 - 1}{X - 1} \\ &= X \times \frac{(X-1)(X-j)(X-j^2)}{X-1} \quad (\text{où } j := e^{i2\pi/3}) \\ &= X(X-j)(X-j^2). \end{aligned}$$

On en déduit que les valeurs propres complexes de  $A$  se trouvent parmi  $0, j, j^2$  :

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0, j, j^2\}.$$

Le polynôme caractéristique  $\chi_A$  est scindé dans  $\mathbb{C}$  et ses racines se trouvent parmi  $0, j, j^2$ ; comme il est unitaire, il se factorise sous la forme :

$$\chi_A(X) = X^a (X-j)^b (X-j^2)^c \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{N}.$$

(noter que  $a, b$  ou  $c$  peuvent s'annuler si jamais le complexe correspondant n'est pas racine de  $\chi_A$ )

Comme  $A$  est une matrice réelle, ses racines complexes sont conjuguées, et deux racines conjuguées ont même ordre de multiplicité.

Puisque  $j^2 = \bar{j}$ , on a  $b = c$ .

Le degré de  $\chi_A$  est égal à la taille de  $A$ , soit  $n$ .

On en déduit que :

$$\chi_A(X) = X^{n-2a} (X-j)^a (X-j^2)^a.$$

Puisque  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{C}$ , la trace de  $A$  est la somme des valeurs propres de  $A$  répétées selon leur ordre :

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= (n-2a) \cdot 0 + a \cdot j + a \cdot j^2 \\ &= a \cdot (j + \bar{j}) \\ &= 2a \text{Re}(j) = -a \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

#### ■ Exercice n° 2

Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$  et  $g$  la fonction définie sur  $D$  par :

$$g(x, y) = \begin{cases} xy \ln(x^2 + y^2) & \text{si } 0 < x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

#### 1) Montrer que la fonction $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overset{\circ}{D}$ .

**Solution.** Posons  $\Omega := \overset{\circ}{D} \setminus \{(0, 0)\}$ , qui est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

##### 1) Montrons que $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$ .

Par les théorèmes opératoires :

- \*  $g_1 : (x, y) \mapsto xy$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$  (fonction polynomiale);
- \*  $g_2 : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$  aussi, et prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$ ;
- \*  $\ln : t \mapsto \ln(t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  (fonction usuelle);
- \*  $g_3 := \ln \circ g_2 : (x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^2)$  est donc de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ ;
- \* et finalement  $g = g_1 \times g_3$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ .

##### 2) Étudions les dérivées partielles de $g$ en $(0, 0)$ .

Par rapport à  $x$  : pour tout  $t$  non nul au voisinage de 0,

$$\frac{g(t, 0) - g(0, 0)}{t} = \frac{0 - 0}{t} = 0 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0, \quad \text{limite finie.}$$

Ainsi,  $\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0)$  existe et vaut 0.

On montre de même que  $\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

**3) Montrons que les dérivées partielles sont continues sur  $\Omega$ .**

Sur  $\Omega$ , cela a été fait à la première étape ; reste la continuité en  $(0, 0)$ . Or :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( x y \ln(x^2 + y^2) \right) \\ &= y \ln(x^2 + y^2) + x y \frac{2x}{x^2 + y^2} \\ &= y \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Montrons que  $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0)$  en utilisant les coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \Omega : \\ \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) \right| \\ &= \left| y \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \\ &= \left| r \sin(\theta) \ln(r^2) + \frac{2r^3 \cos^2(\theta) \sin(\theta)}{r^2} \right| \\ &\leq 2 \left| r \ln(r) \right| + 2r \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} 0. \end{aligned}$$

La dérivée partielle  $\frac{\partial g}{\partial x}$  est bien continue en  $(0, 0)$ .

On montre de même que  $\frac{\partial g}{\partial y}$  l'est aussi.

**Conclusion :**  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur la totalité de  $\overset{\circ}{D}$ .

**2) Montrer que  $g$  admet des extrema globaux sur  $D$ .**

**Solution.**

- L'ensemble  $D$  est la boule unité de  $\mathbb{R}^2$  pour la norme euclidienne.

Montrons que  $g$  est continue sur  $D$  :

- $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\overset{\circ}{D}$  donc elle y est continue.
- Si  $(x_0, y_0)$  est un point de la frontière de  $D$  (autrement dit, si  $x_0^2 + y_0^2 = 1$ ),  $g(x, y) = x y \ln(x^2 + y^2)$  au voisinage de  $(x_0, y_0)$ .

Par les théorèmes d'opérations sur les limites :

$$\begin{aligned} g(x, y) &= x y \ln(x^2 + y^2) \\ \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} x_0 y_0 \ln(x_0^2 + y_0^2) &= g(x_0, y_0) \end{aligned}$$

donc  $g$  est continue au point  $(x_0, y_0)$ .

- La fonction  $g$  est continue sur un fermé borné d'un EVN de dimension finie, à valeurs réelles. Par le théorème des bornes atteintes, elle admet un minimum et un maximum

**3)  $g$  admet-elle un extremum local en  $(0, 0)$  ?**

**Solution.**

**Remarque.** La question se pose car on a vu que  $\nabla g(0, 0) = (0, 0)$  :  $(0, 0)$  est un **point critique** de  $g$ .

En  $\omega := (0, 0)$ , la fonction  $g$  vaut 0. Remarquons que, pour tout  $t \in ]0, 1[$  :

$$\begin{aligned} g(t, t) - g(\omega) &= t^2 \ln(2t^2) < 0 \\ g(t, -t) - g(\omega) &= -t^2 \ln(2t^2) > 0. \end{aligned}$$

Dans tout voisinage de  $\omega = (0, 0)$ , on trouve donc des points  $m^+$  tels que  $g(m^+) > g(\omega)$ , et des points  $m^-$  tels que  $g(m^-) < g(\omega)$ . On en déduit qu'en  $\omega$ ,  $g$  n'admet pas d'extremum local.

**4) Les extrema globaux sont-ils atteints sur le bord de  $D$  ?**

**Solution.** Le bord  $\partial D$  de  $D$  est le cercle de centre  $\omega = (0, 0)$  et de rayon 1, où  $x^2 + y^2 = 1$ . Pour tout  $m \in \partial D$ ,  $g(m) = 0$  ; comme par ailleurs la fonction  $g$  prend des valeurs  $> 0$  et des valeurs  $< 0$ , elle ne peut pas atteindre ses extrema globaux sur  $\partial D$ .

**Remarque.** On peut démontrer que sur l'intérieur  $\overset{\circ}{D}$ , la fonction  $g$  admet 5 points critiques : l'origine  $\omega = (0, 0)$  et les 4 points  $(\pm\sqrt{1/2e}, \pm\sqrt{1/2e})$ .

En  $a := (\sqrt{1/2e}, \sqrt{1/2e})$ ,  $g(a) = -\frac{1}{2e}$ , de même qu'en  $a' = (-\sqrt{1/2e}, -\sqrt{1/2e})$  ;

en  $b = (\sqrt{1/2e}, -\sqrt{1/2e})$ ,  $g(b) = +\frac{1}{2e}$ ,

de même qu'en  $b' = (-\sqrt{1/2e}, \sqrt{1/2e})$ .

Finalement :

$$\min_D(g) = g(a) = -\frac{1}{2e} \quad \text{et} \quad \max_D(g) = g(b) = +\frac{1}{2e}.$$

**Mines-Télécom • Planche C**

**■ Exercice n° 1**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \in ]0, 1[$ .

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres  $n, p$ .

Soit  $Y$  une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $[[1, n]]$ .

On suppose  $X$  et  $Y$  indépendantes.

Soit  $Z$  la variable aléatoire définie par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } X(\omega) \neq 0, \\ Y(\omega) & \text{si } X(\omega) = 0. \end{cases}$$

Trouver la loi de  $Z$ , puis son espérance.

**Solution.**

**1) Loi de  $Z$**

- Quand  $X$  est non nulle, la variable  $Z$  prend la même valeur que  $X$ . Puisque  $X(\Omega) = [[0, n]]$ , il s'agit dans ce cas d'une valeur de  $[[1, n]]$ . Quand  $X$  est nulle, la variable  $Z$  prend la même valeur que  $Y$ . Comme  $Y(\Omega) = [[1, n]]$ , il s'agit encore d'une valeur de  $[[1, n]]$ . Ainsi :  $Z(\Omega) \subset [[1, n]]$ .
- Prenons  $k \in [[1, n]]$  et calculons  $P(Z = k)$  en appliquant la formule des probabilités totales sur le s.c.e.  $([X \neq 0], [X = 0])$  :

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(X \neq 0)P_{[X \neq 0]}(Z = k) \\ &\quad + P(X = 0)P_{[X = 0]}(Z = k) \\ &= P(X \neq 0)P_{[X \neq 0]}(X = k) \\ &\quad + P(X = 0)P_{[X = 0]}(Y = k). \end{aligned}$$

Puisque  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ , en notant  $q := 1 - p$  :

$$P(X = 0) = q^n \quad \text{et} \quad P(X \neq 0) = 1 - q^n.$$

Calculons maintenant les 2 probabilités conditionnelles :

$$\begin{aligned} P_{[X \neq 0]}(X = k) &= \frac{P(X = k, X \neq 0)}{P(X \neq 0)} \\ &= \frac{P(X = k)}{P(X \neq 0)} \quad (\text{car } k \neq 0) \\ &= \frac{1}{1 - q^n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}. \quad (X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)) \end{aligned}$$

Pour la seconde, puisque  $X \perp\!\!\!\perp Y$  :

$$P_{[X = 0]}(Y = k) = P(Y = k) = \frac{1}{n}$$

car  $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$  et  $k \in [[1, n]]$ .

**Conclusion :** La loi de  $Z$  est donnée par :

$$\begin{cases} Z(\Omega) \subset [[1, n]] \\ \forall k \in [[1, n]] : P(Z = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \frac{q^n}{n}. \end{cases}$$

**2) Espérance de  $Z$**

La variable  $Z$  est finie, à valeurs réelles, donc elle admet une espérance (dans  $\mathbb{R}$ ).

Par définition, il s'agit de :

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{k=1}^n k P(Z = k) \\ &= \sum_{k=1}^n k \left( \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \frac{q^n}{n} \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \frac{q^n}{n} \sum_{k=1}^n k$$

On reconnaît l'expression définissant  $E(X)$  dans la première somme :

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(X) + \frac{q^n}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= np + \frac{n+1}{2} q^n. \end{aligned}$$

### ■ Exercice n° 2

On pose  $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ .

1) Montrer que  $A$  est diagonalisable et donner tous ses sous-espaces propres.

**Solution.**  $\chi_A = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A)$   
 $= X^2 + 7X - 8$   
 $= (X-1)(X+8),$

scindé à racines simples, ce qui suffit pour affirmer que  $A$  est diagonalisable.

De plus,  $\text{Sp}(A) = \{1, -8\}$ ; les sous-espaces propres sont des droites et il suffit de trouver un vecteur propre pour chacun. Or :

$$\begin{aligned} A - I_2 &= \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A + 8I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \\ \text{où : } C_1 + 2C_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_1 - C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ V_1 &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in E_1 \quad \text{et} \quad V_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_{-8}. \end{aligned}$$

**Conclusion :** Les sous-espaces propres de  $A$  sont :

$E_1 = \text{Vect}(V_1)$  pour  $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$   
 et  $E_{-8} = \text{Vect}(V_2)$  pour  $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

2) Montrer qu'il existe une matrice  $B$  telle que  $B^3 = A$ .

**Solution.** D'après la question précédente :

$$A = P D P^{-1} \quad \text{pour} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $\Delta := \text{diag}(1, -2)$  vérifie manifestement

$$\Delta^3 = \text{diag}(1, 8) = D.$$

Si l'on pose  $B := P \Delta P^{-1}$ , on obtient :

$$B^3 = (P \Delta P^{-1})^3 = P \Delta^3 P^{-1} = P D P^{-1} = A.$$

**Conclusion :** On a trouvé une matrice  $B$  telle que  $B^3 = A$ .

3) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t).$$

**Solution.** Soit  $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ , où  $x$  et  $y$  sont deux fonctions dérivables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour résoudre le système différentiel proposé, on utilise la réduction de  $A$  trouvée précédemment :

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} = AX(t) &\iff \frac{dX(t)}{dt} = P D P^{-1} X(t) \\ &\iff P^{-1} \frac{dX(t)}{dt} = D P^{-1} X(t) \\ &\iff \frac{d}{dt} (P^{-1} X(t)) = D (P^{-1} X(t)) \end{aligned}$$

car  $P^{-1}$  est une matrice constante, indépendante de  $t$ .

Posons  $Y : t \mapsto P^{-1} X(t)$ , dont nous noterons les composantes  $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ . Alors :

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} = AX(t) &\iff \frac{dY(t)}{dt} = D Y(t) \\ &\iff \begin{cases} u'(t) = u(t) \\ v'(t) = -8 v(t) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\iff \exists C_1, C_2 \in \mathbb{R} / \forall t \in \mathbb{R} : \begin{cases} u(t) = C_1 e^t \\ v(t) = C_2 e^{-8t} \end{cases}$$

Puisque  $X(t) = P Y(t) = P \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$  et que les colonnes de  $P$  sont les vecteurs  $V_1$  et  $V_2$  :

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} = AX(t) &\iff \exists C_1, C_2 \in \mathbb{R} / \forall t \in \mathbb{R} : \\ X(t) &= C_1 e^t V_1 + C_2 e^{-8t} V_2. \\ &= C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-8t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### Mines-Télécom • Planche D

#### ■ Exercice n° 1

Trois joueurs  $A, B, C$  se font des passes avec une balle.

Le joueur  $A$  lance de façon équiprobable la balle à  $B$  ou  $C$ , de même que  $C$  lance la balle de façon équiprobable à  $A$  ou  $B$ ; mais  $B$  lance toujours la balle à  $C$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $a_n$  la probabilité que  $A$  ait la balle après  $n$  passes, et on définit  $b_n$  et  $c_n$  de la même manière.

On pose  $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ .

1) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_{n+1} = AX_n$ , où :

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** On note  $A_n$  (resp.  $B_n, C_n$ ) l'événement « à l'instant  $n$ , le joueur  $A$  (resp.  $B, C$ ) a la balle », pour  $n \in \mathbb{N}$ .

Fixons  $n \in \mathbb{N}$ . Comme à l'instant  $n$ , un joueur et un seul détient la balle,  $(A_n, B_n, C_n)$  est un système complet d'événements.

Appliquons la formule des probabilités totales sur ce s.c.e. pour évaluer  $P(A_{n+1})$ ,  $P(B_{n+1})$  et  $P(C_{n+1})$  :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n) \underbrace{P_{A_n}(A_{n+1})}_{=0} + P(B_n) \underbrace{P_{B_n}(A_{n+1})}_{=0} + P(C_n) \underbrace{P_{C_n}(A_{n+1})}_{=1/2} \\ &= \frac{1}{2} c_n; \\ P(B_{n+1}) &= P(A_n) \underbrace{P_{A_n}(B_{n+1})}_{=1/2} + P(B_n) \underbrace{P_{B_n}(B_{n+1})}_{=0} + P(C_n) \underbrace{P_{C_n}(B_{n+1})}_{=1/2} \\ &= \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} c_n; \\ P(C_{n+1}) &= P(A_n) \underbrace{P_{A_n}(C_{n+1})}_{=1/2} + P(B_n) \underbrace{P_{B_n}(C_{n+1})}_{=1} + P(C_n) \underbrace{P_{C_n}(C_{n+1})}_{=0} \\ &= \frac{1}{2} a_n + b_n. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} c_n \\ \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} c_n \\ \frac{1}{2} a_n + b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \\ &= AX_n. \end{aligned}$$

2) Montrer que la matrice  $A$  est semblable à :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

**Solution.** Soit  $f : V \in \mathbb{R}^3 \mapsto AV \in \mathbb{R}^3$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ .

Pour montrer que  $A \underset{\mathcal{B}}{\sim} T$ , on cherche une base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que  $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = T$ .

- **Analyse.** Supposons qu'on ait trouvé une telle base  $\mathcal{B}$ . En lisant les colonnes de la matrices, on obtient :

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 \\ f(e_2) = -\frac{1}{2}e_2 \\ f(e_3) = e_2 - \frac{1}{2}e_3 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} Ae_1 = e_1 \\ Ae_2 = -\frac{1}{2}e_2 \\ Ae_3 = e_2 - \frac{1}{2}e_3 \end{cases}$$

En particulier  $e_1$  est vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre 1, et  $e_2$  pour la valeur propre  $-\frac{1}{2}$ .

- **Synthèse.**

\* Cherchons les vecteurs propres de  $A$  désirés :

$$A - I_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad A + \frac{1}{2}I_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans la première matrice :  $2C_1 + 3C_2 + 4C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc  $e_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in E_1(A)$ ;

Dans la seconde :  $C_1 - C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc  $e_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_{-1/2}(A)$ .

\* Cherchons un vecteur  $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  tel que  $(A + \frac{1}{2}I_3)V = e_2$  :

$$\begin{aligned} (A + \frac{1}{2}I_3)V &= e_2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=2 \\ x+y+z=0 \\ x+2y+z=-2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ y=-2 \\ y=-2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ z=2-x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

En prenant  $x = 0$ , le vecteur  $e_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$  convient.

\* Vérifions maintenant que  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  :

$$\det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

### 3) Déterminer la limite de la suite $(T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Solution.** On écrit :

$$T = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}}_D + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_N,$$

et on constate que  $N^2 = 0_3$ , d'où il vient immédiatement :  $\forall k \geq 2 : N^k = 0_3$ .

De plus,  $DN = ND$ , ce qui permet d'appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1 : T^n &= (D + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\ &= D^n + nD^{n-1}N + 0_3 + \dots + 0_3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1/2)^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1/2)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/2)^n & n(-1/2)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-1/2)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En prenant la limite de chacune des 9 coordonnées (CC pour la coordonnée en position (2,3)), on obtient :

$$T^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### ■ Exercice n° 2

Soit  $\theta \in ]0, \pi[$  et  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sin(k\theta) x^k$ .

### 1) Montrer par l'absurde que la suite :

$$(u_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\sin(k\theta))_{k \in \mathbb{N}}$$

ne converge pas vers 0.

**Solution.** Par l'absurde, supposons que  $u_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ .

Alors la suite extraite  $(u_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$  tend également vers 0 :

$$\sin((k+1)\theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Or, grâce à la formule d'addition :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sin((k+1)\theta) = \sin(k\theta) \cos(\theta) + \cos(k\theta) \sin(\theta).$$

Comme  $\theta \neq 0 [\pi]$ , on a  $\sin(\theta) \neq 0$ , ce qui permet d'isoler  $\cos(k\theta)$  ; pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \cos(k\theta) &= \frac{1}{\sin(\theta)} (\sin((k+1)\theta) - \sin(k\theta) \cos(\theta)) \\ &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\sin(\theta)} (0 - 0 \cdot \cos(\theta)) = 0. \end{aligned}$$

Mais alors :

$$\cos^2(k\theta) + \sin^2(k\theta) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0^2 + 0^2 = 0,$$

ce qui contredit le fait que  $\cos^2(k\theta) + \sin^2(k\theta)$  est constant égal à 1.

**C'est donc que la suite  $(\sin(k\theta))_{k \in \mathbb{N}}$  ne tend pas vers 0.**

### 2) Déterminer le rayon de convergence $R$ de la série entière dont la somme est $f$ .

**Solution.** En  $x = 1$ , la suite  $(\sin(k\theta) 1^k)_{k \in \mathbb{N}} = (u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  :

- est bornée, donc  $R \geq 1$  ;
- ne tend pas vers 0, donc  $R \leq 1$ .

Ainsi,  $R = 1$ .

### 3) Calculer $f(x)$ pour tout réel $x \in ]-R, R[$ .

**Solution.** Soit  $x \in ]-1, 1[$ . Remarquons que :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad \sin(k\theta) x^k &= \text{Im}(e^{ik\theta}) x^k \\ &= \text{Im}(e^{ik\theta} x^k) \quad (\text{car } x^k \in \mathbb{R}) \\ &= \text{Im}((x e^{i\theta})^k). \end{aligned}$$

La série géométrique complexe  $\sum_{k \geq 0} (x e^{i\theta})^k$  est convergente car  $|x e^{i\theta}| = |x| < 1$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sin(k\theta) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \text{Im}((x e^{i\theta})^k) = \text{Im} \left( \sum_{k=0}^{\infty} (x e^{i\theta})^k \right) \\ &= \text{Im} \left( \frac{1}{1 - x e^{i\theta}} \right) \\ &= \text{Im} \left( \frac{1}{(1 - x \cos \theta) - i x \sin \theta} \right) \\ &= \text{Im} \left( \frac{(1 - x \cos \theta) + i x \sin \theta}{(1 - x \cos \theta)^2 + (x \sin \theta)^2} \right) \\ &= \frac{x \sin \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2}. \end{aligned}$$

### Mines-Télécom • Planche E

### ■ Exercice n° 1

1) Montrer que, pour tout entier  $n \geq 2$ , l'équation :

$$1 + \ln(x + n) = x$$

admet une unique solution dans  $\mathbb{R}_+$ .

**On note  $u_n$  cette solution.**

**Solution.** Soit  $n \geq 2$  et  $x \geq 0$ ; alors :

$$1 + \ln(x + n) = x \iff 1 + \ln(x + n) - x = 0.$$

On étudie donc la fonction  $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 1 + \ln(x + n) - x.$

Cette fonction est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  et on a :

$$\forall x \geq 0 : f'_n(x) = \frac{1}{x+n} - 1$$

$$f'_n(x) = 0 \iff \frac{1}{x+n} - 1 = 0$$

$$\iff x = 1 - n \notin \mathbb{R}_+.$$

Comme  $f'_n$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et ne s'y annule pas, elle est de signe constant sur  $\mathbb{R}_+$  : celui de  $f'_n(0) = \frac{1}{n} - 1 < 0$ .

$x$	0	$u_n$	$+\infty$
$f'_n(x)$	$\frac{1}{n} - 1 < 0$	—	
$f_n(x)$	$1 + \ln(n) > 0$	0	$-\infty$

La fonction  $f_n$  est donc strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .  
 En 0, elle vaut :  $f_n(0) = 1 + \ln(n) \geq 1 + \ln(2) > 0$ ;  
 En  $+\infty$  :  $f_n(x) = 1 + \ln(x + n) - x = -x + o(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x$ , donc  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = -\infty$ .

La fonction  $f_n$  est continue et strictement décroissante sur  $[0, +\infty[$ . Par le **théorème de la bijection monotone**, elle est bijective de  $I := [0, +\infty[$  dans  $J := ]\lim_{+\infty} f_n, f_n(0)] = ]-\infty, 1 + \ln(n)]$ .  
 Puisque  $0 \in J$ , l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution  $u_n$  dans  $I$ .

En d'autres termes, l'équation  $1 + \ln(x + n) = x$  admet une unique solution  $u_n$  dans  $\mathbb{R}_+$ .

2) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 2}$  est croissante.

**Solution.** Soit  $n \geq 2$ . Pour comparer  $u_n$  et  $u_{n+1}$ , on compare leurs images par la fonction  $f_n$ .  
 Par définition de  $u_n$ ,  $f_n(u_n) = 0$  : il s'agit donc de trouver le signe de  $f_n(u_{n+1})$ .

$$f_n(u_{n+1}) = 1 + \ln(u_{n+1} + n) - u_{n+1}.$$

En utilisant la définition de  $u_{n+1}$  :

$$f_n(u_{n+1}) = 1 + \ln(u_{n+1} + n) - (1 + \ln(u_{n+1} + n + 1))$$

$$= -\ln\left(\frac{u_{n+1} + n + 1}{u_{n+1} + n}\right)$$

$$= -\ln\left(1 + \frac{1}{u_{n+1} + n}\right).$$

Puisque  $u_{n+1} \geq 0$ , l'argument du logarithme est strictement supérieur à 1, donc le logarithme est strictement positif. Ainsi :

$$f_n(u_{n+1}) < 0 = f_n(u_n)$$

$x$	0	$u_n$	$u_{n+1}$	$+\infty$
$f_n(x)$	$1 + \ln(n) > 0$	0	$< 0$	$-\infty$

Comme  $f_n$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$  :  $u_{n+1} > u_n$ .

**Conclusion :** La suite  $(u_n)_{n \geq 2}$  est strictement croissante.

3) Montrer que :

$$\forall n \geq 3, \ln(n) < u_n < n.$$

En déduire un équivalent de  $u_n$ .

**Solution.** Fixons un entier  $n \geq 3$ .

• Pour comparer  $u_n$  à  $\ln(n)$ , on part de la définition de  $u_n$  :

$$u_n = 1 + \ln(u_n + n).$$

Puisque  $u_n \geq 0$ ,  $u_n + n \geq n$  donc  $\ln(u_n + n) \geq \ln(n)$  et enfin :

$$u_n = 1 + \ln(u_n + n) > \ln(u_n + n) \geq \ln(n).$$

**Conclusion :**  $\forall n \geq 3 : u_n > \ln(n)$ .

• Pour comparer  $u_n$  à  $n$ , on compare  $f_n(u_n) = 0$  à  $f_n(n) = 1 + \ln(2n) - n$  : il faut trouver le signe de cette quantité. On étudie la fonction  $\varphi : x \mapsto 1 + \ln(2x) - x$  sur l'intervalle  $I := [3, +\infty[$ .

Sa dérivée vérifie  $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0$  sur  $I$ .

La fonction  $\varphi$  est strictement décroissante sur  $I$ , et en  $x = 3$  :

$$\varphi(3) = \ln(6) - 2 < 0.$$

En effet, comparons plutôt 6 et  $e^2$  :

$$e^2 > (2,5)^2 = 6,25 > 6,$$

donc en prenant le logarithme :  $2 > \ln(6)$ .

$x$	3	$n$	$+\infty$
$\varphi'(x)$		—	
$\varphi(x)$	$\ln(6) - 3 < 0$	(-)	$-\infty$

On en déduit que  $\varphi$  est strictement négative sur  $I$ , donc que  $f_n(n) < 0$  pour tout entier  $n \geq 3$ .

Enfin :  $f_n(n) < f_n(u_n)$  d'où  $n > u_n$  grâce à la décroissance de  $f_n$ .

**Conclusion :**  $\forall n \geq 3 : \ln(n) < u_n < n$ .

• Partons de la définition des termes  $u_n$  :

$$\forall n \geq 3 : u_n = 1 + \ln(u_n + n).$$

En utilisant la majoration  $u_n < n$  :

$$u_n + n < 2n$$

$$\ln(u_n + n) < \ln(2n) = \ln(n) + \ln(2)$$

$$1 + \ln(u_n + n) \leq \ln(n) + \ln(2) + 1$$

donc  $u_n < \ln(n) + \ln(2) + 1$ .

Avec la minoration  $\ln(n) < u_n$  on obtient un nouvel encadrement de  $u_n$  :

$$\forall n \geq 3 : \ln(n) < u_n < \underbrace{\ln(n) + \ln(2) + 1}_{\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln(n)}$$

Par le théorème d'encadrement pour les équivalents :

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln(n).$$

### ■ Exercice n° 2

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X$  une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre  $1/n$ . Montrer que :

1)  $P(X \geq n^2) \leq \frac{1}{n}$ ;

**Solution.** Puisque  $X$  suit une loi géométrique, c'est une variable aléatoire **positive**. On peut donc lui appliquer l'inégalité de Markov au seuil  $n^2$  :

$$P(X \geq n^2) \leq \frac{E(X)}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{1/n} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

$$2) P(|X - n| \geq n) \leq 1 - \frac{1}{n};$$

**Solution.** Comme  $X$  suit une loi géométrique, elle admet une variance. On peut donc lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la tolérance  $n > 0$  :

$$P(|X - E(X)| \geq n) \leq \frac{V(X)}{n^2}$$

$$\text{d'où : } P(|X - n| \geq n) \leq \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1 - 1/n}{(1/n)^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{n}.$$

$$3) P(X \geq 2n) \leq 1 - \frac{1}{n}.$$

**Solution.** Remarquons que, pour tout  $\omega \in \Omega$  :

$$|X(\omega) - n| \geq n \iff X(\omega) - n \geq n \text{ ou } X(\omega) - n \leq -n$$

$$\iff X(\omega) \geq 2n \text{ ou } X(\omega) \leq 0.$$

Écrit sous forme d'événements :

$$[|X - n| \geq n] = [X \geq 2n] \cup \underbrace{[X \leq 0]}_{= \emptyset \text{ car } X(\Omega) \subset \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}} = [X \geq 2n].$$

Ainsi, grâce à la question précédente :

$$P(X \geq 2n) = P(|X - n| \geq n) \leq 1 - \frac{1}{n}.$$

## Mines-Télécom • Planche F

### ■ Exercice n° 1

Soit  $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, 1 - x - y \geq 0\}$ .

On introduit  $f : (x, y) \in T \mapsto xy \sqrt{1 - x - y}$ .

1) Montrer que  $f$  admet un minimum et un maximum sur  $T$ .

**Solution.**

- On applique le **théorèmes des bornes** : puisque  $f$  est une fonction définie sur une partie fermée et bornée de  $\mathbb{R}^2$ , de dimension finie, à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  (par la définition de  $T$ ); alors  $f$  admet un minimum et un maximum sur  $T$ .
- $T$  est fermé comme intersection de 3 fermés :  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  et  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 - x - y \geq 0\}$ ; ce dernier ensemble est fermé car  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1 - x - y \in \mathbb{R}$  est continue car polynomiale.
- $T$  est clairement borné pour la norme  $\|\cdot\|_1$  : si  $(x, y) \in T$ , alors  $x \geq 0, y \geq 0$  et  $x + y \leq 1$ , donc :
 
$$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y| = x + y \leq 1, \text{ indépendant de } (x, y).$$

- Prouvons la continuité de  $f$  sur  $T$  :
  - \*  $f_1 : (x, y) \in T \mapsto 1 - x - y$  est continue sur  $T$  car polynomiale, à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  (par la définition de  $T$ );
  - \*  $f_2 : t \mapsto \sqrt{t}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  (fonction usuelle);
  - \*  $f_3 : (x, y) \in T \mapsto \sqrt{1 - x - y}$  est continue sur  $T$  (car c'est  $f_2 \circ f_1$ );
  - \*  $f_4 : (x, y) \in T \mapsto xy$  est continue sur  $T$  car polynomiale;
  - \*  $f = f_4 \times f_3$  est donc continue sur  $T$ .

2) Déterminer les extrema de  $f$ .

**Solution.** On recherche les points critiques de  $f$  sur l'intérieur de  $T$  :

$$\overset{\circ}{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0, 1 - x - y > 0\},$$

puis on étudie  $f$  sur la frontière  $\partial T$  du triangle, constituée de 3 segments.

- **Sur  $\overset{\circ}{T}$**  : On montre que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  comme on l'a fait pour la continuité ci-dessus, en remplaçant  $T$  par  $\overset{\circ}{T}$ , et  $\mathbb{R}_+$  par  $\mathbb{R}^*$ .

Soit  $m = (x, y) \in \overset{\circ}{T}$  quelconque. Alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(m) = y \sqrt{1 - x - y} - \frac{xy}{2\sqrt{1 - x - y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(m) = x \sqrt{1 - x - y} - \frac{xy}{2\sqrt{1 - x - y}}.$$

On cherche les points critiques :

$$\nabla f(m) = \vec{0}$$

$$\iff \begin{cases} y \sqrt{1 - x - y} - \frac{xy}{2\sqrt{1 - x - y}} = 0 \\ x \sqrt{1 - x - y} - \frac{xy}{2\sqrt{1 - x - y}} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2y(1 - x - y) - xy = 0 \\ 2x(1 - x - y) - xy = 0 \end{cases} \quad (\times 2\sqrt{1 - x - y} \neq 0)$$

$$\iff \begin{cases} 2(y - x)(1 - x - y) = 0 \\ 2x(1 - x - y) - xy = 0 \end{cases} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \text{ et factor.})$$

$$\iff \begin{cases} y = x \\ 2x(1 - 2x) - x^2 = 0 \end{cases} \quad (1 - x - y \neq 0; \text{ subs. } L_1 \text{ dans } L_2)$$

$$\iff \begin{cases} y = x \\ x(2 - 5x) = 0 \end{cases}$$

$$\iff m = (2/5, 2/5) =: a. \quad (x \neq 0)$$

Le point  $a$  se trouve bien dans  $\overset{\circ}{T}$  : c'est un point critique de  $f$ .  
En ce point :

$$f(a) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{4}{25\sqrt{5}}.$$

- Sur le bord du triangle, on a  $x = 0$ , ou  $y = 0$ , ou  $1 - x - y = 0$ . Chacune de ces conditions suffit à annuler  $f$  :  **$f$  est identiquement nulle sur  $\partial T$ .**

**Conclusion** :  $\min_T(f) = 0$ , atteint en tout point de  $\partial T$ ;  
 $\max_T(f) = \frac{4}{25\sqrt{5}}$ , atteint en  $a = (2/5, 2/5)$ .

### ■ Exercice n° 2

On considère la suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$P_0 = 1, \quad P_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2} = \frac{1}{2}(X P_{n+1} + P_n).$$

1) Montrer qu'il existe une variable aléatoire  $X_n$  dont  $P_n$  est la fonction génératrice.

**Solution.** Dire que  $P_n$  est la fonction génératrice de la variable  $X_n$  revient à dire que :

$$\forall t \in [-1, 1] : \quad P_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = k) t^k.$$

En écrivant  $P_n = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ , par unicité du DSE, cela revient à dire que la loi de  $X_n$  est donnée par les coefficients du polynôme  $P_n$ .

Pour qu'une telle variable  $X_n$  existe, il faut et il suffit que les coefficients du polynôme  $P_n$  soient tous positifs, et que leur somme vaille 1.

Remarquons en outre que le polynôme  $P_n$  semble être toujours de degré  $n$ .

Voilà pourquoi on démontre, par récurrence double sur  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\mathcal{H}(n) : \quad \ll P_n \text{ peut s'écrire } P_n = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

avec des  $a_k \geq 0$ , de somme 1. »

\* **Initialisation double.** Immédiat pour  $P_0 = 1$  et  $P_1 = X$ .

\* **Hérédité double.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{H}(n)$  et  $\mathcal{H}(n+1)$  : on peut écrire  $P_n$  et  $P_{n+1}$  sous la forme :

$$P_n = \sum_{k=0}^n a_k X^k \quad \text{et} \quad P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} b_k X^k,$$

où tous les  $a_k$  et  $b_k$  sont positifs, et :

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^{n+1} b_k = 1.$$

Étudions les coefficients de  $P_{n+2}$  :

$$\begin{aligned} P_{n+2} &= \frac{1}{2} (X P_{n+1} + P_n) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^{n+1} b_k X^{k+1} + \sum_{k=0}^n a_k X^k \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^{n+2} b_{k-1} X^k + \sum_{k=0}^n a_k X^k \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{b_{k-1} + a_k}{2} X^k + \sum_{k=n+1}^{n+2} \frac{b_{k-1}}{2} X^k. \end{aligned}$$

Clairement, tous les coefficients de  $P_{n+2}$  sont positifs, et leur somme vaut :

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{b_{k-1} + a_k}{2} + \sum_{k=n+1}^{n+2} \frac{b_{k-1}}{2} \\ = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=1}^{n+2} b_{k-1} \right) = \frac{1}{2} (1 + 1) = 1. \end{aligned}$$

La proposition  $\mathcal{H}(n+2)$  est démontrée.

**Conclusion :** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une variable aléatoire  $X_n$  dont la fonction génératrice est  $P_n$ .

## 2) Exprimer $E(X_n)$ en fonction de $n$ .

**Solution.** Chaque variable  $X_n$  a pour fonction génératrice  $P_n$ . Cette dernière, polynomiale, est dérivable en 1 : on en déduit que  $X_n$  est d'espérance finie ( $X_n \in L^1$ ) et que  $E(X_n) = P'_n(1)$ .

Notons  $m_n = E(X_n)$ ; on a :

$$m_0 = P'_0(1) = 0 \quad \text{et} \quad m_1 = P'_1(1) = 1.$$

En dérivant la relation de récurrence et en appliquant en 1 :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} : \quad P'_{n+2}(X) &= \frac{1}{2} \cdot (P_{n+1}(X) + X P'_{n+1}(X) + P'_n(X)) \\ P'_{n+2}(1) &= \frac{1}{2} \cdot (P_{n+1}(1) + P'_{n+1}(1) + P'_n(1)) \\ m_{n+2} &= \frac{1}{2} \cdot (1 + m_{n+1} + m_n). \end{aligned}$$

La suite  $(m_n)$  vérifie donc :

$$m_0 = 0, \quad m_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : 2m_{n+2} - m_{n+1} - m_n = 1. \quad (E)$$

Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, mais **non homogène** à cause du second membre 1 (au lieu de 0).

Le terme général de cette suite s'obtient comme pour une équation différentielle non homogène : cas homogène, et solution particulière.

\* Les suites vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2m_{n+2} - m_{n+1} - m_n = 0 \quad (H)$$

ont pour équation caractéristique  $2r^2 - r - 1 = 0$ , de solutions  $r_1 = 1$  et  $r_2 = -\frac{1}{2}$ .

Elles s'écrivent donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} : m_n = A + B \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad \text{où } A, B \in \mathbb{R} \text{ constantes.}$$

\* Il faut maintenant trouver un exemple de suite satisfaisant (E).

Les suites constantes (de même type que le second membre 1) ne conviennent pas ici car elles satisfont (H) d'après ce qu'on vient de voir.

On fait donc « monter le degré » en essayant la suite  $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On l'injecte dans la relation (E) :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} : 2(n+2) - (n+1) - n &= 3 \\ \text{d'où } 2 \left(\frac{n+2}{3}\right) - \left(\frac{n+1}{3}\right) - \left(\frac{n}{3}\right) &= 1. \end{aligned}$$

La suite  $\left(\frac{n}{3}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfait (E).

\* Les suites satisfaisant (E) sont donc exactement les suites de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N} : m_n = \frac{n}{3} + A + B \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad \text{où } A, B \in \mathbb{R} \text{ constantes.}$$

La suite des espérances que l'on cherche est de ce type.

En utilisant que  $m_0 = 0$  et que  $m_1 = 1$ , on obtient que  $A = -B = 4/9$ .

**Conclusion :**  $\forall n \in \mathbb{N} : E(X_n) = \frac{n}{3} + \frac{4}{9} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$ .

## 3) Déterminer la variance de $X_n$ .

**Solution.** Les fonctions  $P_n$  étant toujours 2 fois dérivables en 1, on en déduit que  $X_n \in L^2$  et que  $E(X_n(X_n - 1)) = P''_n(1)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

En procédant comme pour l'espérance (mais en dérivant 2 fois), on constate que la suite des  $E(X_n(X_n - 1))$  satisfait la relation de récurrence :

$$2u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = E(X_n), \quad (E')$$

cette espérance ayant été calculée à la question précédente.

La résolution de cette relation de récurrence s'annonce fastidieuse car le second membre est nettement plus compliqué... affaire à suivre, mais on y arrivera avec de la patience.

On obtiendra ainsi les  $E(X_n(X_n - 1))$  avant d'utiliser la relation

$$V(X_n) = E(X_n(X_n - 1)) + E(X_n) - (E(X_n))^2$$

pour conclure.

## Mines-Télécom • Planche G

### ■ Exercice n° 1

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ .

#### 1) Montrer que $A$ est diagonalisable.

**Solution.**  $A \in S_3(\mathbb{R})$  dont  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  d'après le théorème spectral.

#### 2) Déterminer les éléments propres de $A$ .

**Solution.**

• Pour trouver les valeurs propres de  $A$ , on calcule son polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det(X I_3 - A) = \begin{vmatrix} X-a & 0 & -b \\ 0 & X-(a+b) & 0 \\ -b & 0 & X-a \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} X-(a+b) & 0 & -b \\ X-(a+b) & X-(a+b) & 0 \\ X-(a+b) & 0 & X-a \end{vmatrix} \\ &= (X-(a+b)) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -b \\ 1 & X-(a+b) & 0 \\ 1 & 0 & X-a \end{vmatrix} \\ &= (X-(a+b)) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & X-(a+b) & b \\ 0 & 0 & X-a+b \end{vmatrix} \\ &= (X-(a+b))^2 \cdot (X-(a-b)), \end{aligned}$$

d'où  $\text{Sp}(A) = \{a+b; a-b\}$ .

Pour les SEP on distingue 2 cas, selon que  $a+b$  et  $a-b$  soient confondus ou non :

• **1<sup>er</sup> cas :** si  $a+b = a-b$ , c.à.d.  $b = 0$ .

Dans ce cas,  $A = a I_3$  a pour unique valeur propre  $a$  et  $E_a = \mathbb{R}^3$ .

• **2<sup>e</sup> cas :** si  $a+b \neq a-b$ , c.à.d.  $b \neq 0$ .

Ici,  $A$  admet 2 valeurs distinctes :  $a+b$  valeur propre double, et  $a-b$  valeur propre simple.

Comme  $A$  est diagonalisable, la dimension de ses SEP est égale à la multiplicité des vp :

$$\dim(E_{a+b}) = 2 \quad \text{et} \quad \dim(E_{a-b}) = 1.$$

Il suffit de trouver  $V_1, V_2$  non colinéaires dans  $E_{a+b}$ , et  $V_3$  non nul dans  $E_{a-b}$ , pour obtenir une base de chaque SEP.

On constate facilement que :

$$V_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{conviennent} :$$

$(V_1, V_2)$  est une base de  $E_{a+b}$  tandis que  $(V_3)$  est une base de  $E_{a-b}$ .

■ Exercice n° 2

On définit, pour tout entier  $n \geq 2$  et tout réel  $x > 0$  :

$$u_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}.$$

1) Déterminer le domaine  $\mathcal{D}$  de convergence de la série  $\sum_{n \geq 2} u_n$ .

**Solution.** On cherche les  $x > 0$  tels que la série numérique  $\sum_{n \geq 2} u_n(x)$  converge.

\* **Analyse.** Si la série converge, nécessairement son terme général tend vers 0. Le comportement de  $x^n$  quand  $n \rightarrow \infty$  dépend de la position de  $x$  par rapport à 1 :

$$u_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & \text{si } x > 1, \\ +\infty & \text{si } x < 1, \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

\* **Synthèse.** Prenons  $x \geq 1$  et étudions la nature de la série :

· **Si  $x > 1$  :** manifestement,  $u_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right)$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

La série géométrique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{x^n}$  est à termes positifs, et converge car sa raison  $\frac{1}{x}$  vérifie  $|\frac{1}{x}| < 1$ .

Par théorème de comparaison, la série  $\sum_{n \geq 2} u_n(x)$  converge.

· **Si  $x = 1$  :**  $\ln(x) = 0$  donc tous les termes de la série sont nuls. La série converge également.

**Conclusion :** La série  $\sum_{n \geq 2} u_n$  converge sur le domaine  $\mathcal{D} := [1, +\infty[$ .

2) Montrer que cette série ne converge pas normalement sur  $\mathcal{D}$ .

**Solution.**

• Pour prouver que la série  $\sum_{n \geq 2} \|u_n\|_\infty$  diverge, on calcule la valeur exacte de ses termes.

Pour cela, on mène l'étude de la fonction  $u_n$ . Cette fonction est dérivable sur  $\mathcal{D}$  et on trouve :

$$\forall n \geq 2, \forall x \geq 1 : u'_n(x) = \frac{1 - n \ln(x)}{x^{n+1}},$$

qui s'annule uniquement en  $e^{1/n} \in \mathcal{D}$ , en étant positive en deçà et négative au delà. On en déduit :

$$\forall n \geq 2 : \|u_n\|_\infty = \max_{x \geq 1} |u_n(x)| = |u_n(e^{1/n})| = \frac{1}{e \cdot n \ln(n)}.$$

• La série de Bertrand  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$  est divergente. Pour le montrer, on procède par **comparaison série-intégrale** :

$$\forall n \geq 2 : S_n := \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \geq \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t \ln(t)} = \int_2^{n+1} \frac{dt}{t \ln(t)} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2).$$

Puisque ce terme tend vers  $+\infty$  (certes très lentement!), les sommes partielles de notre série de Bertrand également, et cette série est bien divergente.

**Conclusion :** La série  $\sum_{n \geq 2} u_n$  ne converge pas normalement sur  $\mathcal{D} = [1, +\infty[$ .

On note  $(R_n)_{n \geq 2}$  la suite des restes de la série  $\sum_{n \geq 2} u_n$ .

3) Montrer que :

$$\forall n \geq 2, \forall x \in \mathcal{D}, |R_n(x)| \leq \frac{1}{x^n \ln(n+1)}.$$

**Solution.** Fixons  $x \geq 1$  et  $n \geq 2$ ; on souhaite majorer :

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^k \ln(k)} \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^k \ln(k)}.$$

**On traite d'abord le cas où  $x > 1$ .**

Comme dans la somme,  $k \geq n+1 \geq 3$ ,

on a :  $\ln(k) \geq \ln(n+1) \geq \ln(3) > 0$ . On obtient :

$$\forall k \geq n+1 : \frac{\ln(x)}{x^k \ln(k)} \leq \frac{\ln(x)}{x^k \ln(n+1)} = \frac{\ln(x)}{\ln(n+1)} \cdot \frac{1}{x^k}.$$

Comme la série géométrique  $\sum_{k \geq n+1} \frac{1}{x^k}$  est convergente ( $0 < 1/x < 1$ ), on peut sommer ces inégalités pour  $k \geq n+1$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^k \ln(k)} &\leq \frac{\ln(x)}{\ln(n+1)} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{x^k} = \frac{\ln(x)}{\ln(n+1)} \cdot \frac{1/x^{n+1}}{1-1/x} \\ &= \frac{\ln(x)}{\ln(n+1)} \cdot \frac{1}{x^n(x-1)} = \frac{1}{x^n \ln(n+1)} \cdot \frac{\ln(x)}{x-1}. \end{aligned}$$

Or, une inégalité de convexité classique donne :

$$\forall x > 1 : 0 < \ln(x) \leq x-1 \quad \text{donc} \quad 0 < \frac{\ln(x)}{x-1} \leq 1.$$

En divisant ceci par  $x^n \cdot \ln(n+1) > 0$ , on obtient l'inégalité souhaitée.

4) Montrer que la somme  $S$  de la série  $\sum_{n \geq 2} u_n$  est continue sur  $\mathcal{D}$ .

**Solution.** La question précédente permet de majorer la norme uniforme du reste; on obtient :

$$\forall n \geq 2 : \|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

Ce majorant tend vers 0, ce qui prouve que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 2} u_n$  converge uniformément sur  $\mathcal{D}$ .

Comme toutes les fonctions  $u_n$  sont continues sur  $\mathcal{D}$ , le théorème de transfert de continuité s'applique, prouvant que la somme  $S$  de cette série est continue sur  $\mathcal{D}$ .

5) Déterminer les limites de la somme  $S$  de la série  $\sum_{n \geq 2} u_n$  aux extrémités de  $\mathcal{D}$ .

**Solution.** Grâce à la continuité de  $S$  en 1 :

$$S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} S(1) = 0.$$

En  $+\infty$ , on constate que :

$$\forall n \geq 2 : u_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ limite finie.}$$

Puisque la série des  $u_n$  converge uniformément sur  $\mathcal{D}$ , dont  $+\infty$  est une extrémité, le théorème d'interversion  $\sum / \lim$  s'applique :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = \sum_{n=2}^{\infty} 0 = 0.$$