

---

# Mécanique du point et quantique

---

## MEC-1: Frottements solides (Mathilde ALLEMAND Mines-Ponts 2025)

Fait en classe

## MEC-2: Sonde Cassini et atterrisseur Huygens (Aurèle DURAND CCINP 2025)

Fait en classe

## MEC-3: Bille et gouttière (Alhassane BAH CCINP 2024, Pb Ouvert)

1. Appelons  $A$  le point de départ, et  $B$  le point de décollage. Et prenons un axe  $(Oz)$  vertical ascendant, avec l'origine au point bas de la gouttière.

On isole la bille dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, et on lui applique le théorème de l'énergie mécanique :

$$mgR(1 - \cos \alpha) = mgR(1 - \cos \beta) + \frac{1}{2}mv_B^2. \text{ Et puisque } \alpha = \pi/2, \text{ on obtient } v_B = \sqrt{2gR \cos \beta}.$$

Après avoir quitté la gouttière en  $B$ , la bille est en chute libre. On lui applique le PFD, en négligeant les frottements de l'air. En projetant selon  $(Oz)$  :

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g, \text{ d'où, en prenant } t = 0 \text{ en } B : \frac{dz}{dt} = -gt + \sin \beta \sqrt{2gR \cos \beta}$$

$$\text{puis } z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + t \sin \beta \sqrt{2gR \cos \beta} + R(1 - \cos \beta).$$

Soit  $C$  le point d'altitude maximale. Il est atteint à  $t_1 = \sin \beta \sqrt{\frac{2R \cos \beta}{g}}$ .

$$\text{On a donc } z_C = -\frac{1}{2}g \sin^2 \beta \frac{2R \cos \beta}{g} + \sin \beta \sqrt{\frac{2R \cos \beta}{g}} \sin \beta \sqrt{2gR \cos \beta} + R(1 - \cos \beta) = -R \sin^2 \beta \cos \beta + 2R \sin^2 \beta \cos \beta + R(1 - \cos \beta).$$

Plus simplement,  $z_C = R(1 - \cos \beta + \sin^2 \beta \cos \beta) = R(1 - \cos^3 \beta)$ .

2. Pour  $\beta = \pi/3$ , cela donne  $z_C = \frac{7}{8}R = 0.88\text{m}$ .

3. Prenons l'origine de l'axe des  $x$  en  $B$ . Le PFD projeté selon  $(Ox)$ , puis intégré, donne  $x(t) = t\sqrt{2gR \cos \beta} \cos \beta$ . Pour trouver l'équation de la trajectoire, on élimine  $t$  :

$$z = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{2gR \cos^3 \beta} + \frac{x}{\cos \beta \sqrt{2gR \cos \beta}} \sin \beta \sqrt{2gR \cos \beta} + R(1 - \cos \beta),$$

$$\text{ou encore } z = -\frac{x^2}{4R \cos^3 \beta} + x \tan \beta + R(1 - \cos \beta).$$

On cherche si  $z > h + z_B$ , donc  $z > h + R(1 - \cos \beta)$  pour  $x = a$ , c'est-à-dire si  $-\frac{a^2}{4R \cos^3 \beta} + a \tan \beta > h$ .

## MEC-4: Saut à l'élastique (Clément BALLAND CCINP 2024, Arthur VINCENOT CCINP 2018 Pb Ouvert)

Fait en classe, mais voici une solution tapée :

On se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, et on néglige les frottements de l'air. On isole la personne qui saute.

Il est soumis à son poids et à la force d'élasticité de la corde, deux forces conservatives. On peut donc écrire que l'énergie mécanique se conserve.

On note  $h_1$  la hauteur de l'individu,  $m$  sa masse,  $\ell_0$  la longueur de la corde à vide,  $k$  sa raideur,  $\ell_{max}$  sa longueur quand l'individu est tout en bas (quand il touche l'eau).

On choisit l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur au niveau du point de départ du saut. On suppose que l'individu se laisse tomber.

La conservation de l'énergie mécanique entre le point de départ s'écrit :

$$0 + 0 + 0 = 0 - mgH + \frac{1}{2}k(\ell_{max} - \ell_0)^2$$

$$\text{D'où } k = \frac{2mgH}{(\ell_{max} - \ell_0)^2}.$$

Et d'après les informations de l'énoncé, l'allongement de la corde est de 200%, donc  $\ell_{max} = 3\ell_0$ , puis  $k = \frac{2mgH}{4\ell_0^2}$ .

$$\text{Et puisque } \ell_{max} = H - h_1 = 3\ell_0, \ell_0 = \frac{H - h_1}{3}, \text{ puis } k = \frac{9mgH}{2(H - h_1)^2}.$$

D'où

En prenant  $m = 80\text{kg}$ ,  $g = 9.8\text{ms}^{-2}$ ,  $h_1 = 2\text{m}$ , on trouve  $k = 24\text{Nm}^{-1}$ .

## MEC-5: Le flipper (Emilie MOUGIN CCINP 2024, Alexandre HENRIOT CCP 2016), Pb ouvert

On isole l'ensemble constitué de la boule (de masse  $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ ) et du ressort (de masse nulle).

Si on néglige les frottements, l'énergie mécanique,  $E_m$ , de ce système, se conserve.

Notons  $h_1$  l'altitude de la boule quand elle est en contact avec le lanceur, et  $h_2$  l'altitude de la boule quand elle est en haut du plateau.

Dans l'état initial, l'énergie mécanique du système est :

$$E_{m_{init}} = 0 + mg h_1 + \frac{1}{2} k (\Delta \ell)^2.$$

En haut du plateau (donc à la fin de la phase de lancement), elle devient :

$$E_{m_{fin}} = \frac{1}{2} m v_{min}^2 + mg h_2 + 0.$$

Et puisque l'énergie mécanique se conserve,  $\Delta \ell = \sqrt{\frac{2mg}{k} (h_2 - h_1) + \frac{m}{k} v_{min}^2}$ .

Et pour déterminer la raideur du ressort, on se sert des deux photos du haut, grâce auxquelles on peut voir le rétrécissement

$\Delta \ell_{max} \simeq 6.0$  cm associé à la force  $F_{max} = 5.0$  N. On en déduit  $k = \frac{F_{max}}{\Delta \ell_{max}}$ .

Puis on détermine la force  $F$  à exercer sur le lanceur :

$$F = k \Delta \ell = \sqrt{mk} \sqrt{2g(h_2 - h_1) + v_{min}^2} = 4.1 \text{ N}.$$

#### MEC-6: Panier de basket à 3 points Simon JEHLE CCINP 2023)

Fait en classe. Attention, la solution proposée par certains d'entre vous n'était pas la bonne, cf pgm python sur cette page internet de Hugoprepas.

#### MEC-7: Oscillations dans un tunnel creusé dans un astre (Solenn VIEILLE et Yannis PALMERO CCINP 2022, Sébastien MISSEY CCP 2018, Yvan FUCHS CCP 2017)

1. Analogies entre gravitation et électrostatique : voir cours.

$$2. \vec{g} = -\frac{GM}{R^3} r \vec{u}_r.$$

$$3. \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{MG}{R^3} x = 0, \text{ d'où } x(t) = x_A \cos(\omega t), \text{ avec } \omega = \sqrt{\frac{MG}{R^3}}.$$

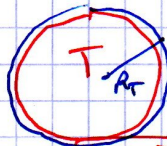
4. Période  $T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{MG}}$ . Numériquement,  $5.1 \times 10^3$  s, soit 1,4 h.

5. PFD pour un satellite qui rase la Terre : on trouve la même période, donc les deux mobiles vont pouvoir passer en A ensemble, à la fin de chaque période.

#### MEC-8: Freinage d'urgence d'une voiture (Thomas ZABE CCINP 2025, Hippolyte MONTAGNE CCINP 2021, Jeanne GUYOT et Caroline JANNIN CCP 2018 et écrit 2019 Pb Ouvert)

#### MEC-9: Orbite de transfert satellite à réaction (LSL CCP 2018)

1.) Les vitesses cosmiques:  
 TAD pour la masse  $m$   
 satellisée dans  $R_T$ , mètre galiléen:



$$\sqrt{v_1} \Rightarrow \frac{m v_1^2}{R_T} = \frac{G M_T m}{R_T^2} = m g \Rightarrow \boxed{v_1 = \sqrt{g R_T} = 7,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}}$$

2.)  $v_0 < v_1$ , possible car  $\frac{m v_0^2}{R_T + h} = m g \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} \Rightarrow v_0^2 = g \frac{R_T^2}{R_T + h}$

$$v_0^2 = v_1^2 \frac{R_T}{R_T + h}$$

$$\Rightarrow v_0 < v_1$$

ou:  $v_1 = \sqrt{\frac{G M_T}{R_T}}$  et  $v_0 = \sqrt{\frac{G M_T}{R_T + h}}$

Références

3.) Conformément à l'énoncé, on néglige la force gravitationnelle (devant la force fictive de poussée)

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}^*}{dt} \approx \vec{0}, \text{ avec } \Sigma^* = \text{satellite} + \text{contenu à } t, \text{ de masse } m(t)$$

$$\text{à } t + dt, \text{ satellite } -\delta m + \delta m \vec{e}_z \text{ à } dt$$

$$\vec{p}^*(t) = m(t) v(t) \vec{u}$$

$$\vec{p}^*(t+dt) = (m(t) - \delta m) v(t+dt) \vec{u} + \delta m (v(t) - u) \vec{u}$$

$$\frac{d\vec{p}^*}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \frac{m v + m dv - \delta m v - \delta m dv + \delta m v - \delta m u - m u}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow m \frac{dv}{dt} = \frac{\delta m}{dt} u$$

$$\text{et } m(t) = m_0 - \Delta m t \Rightarrow \delta m = \Delta m dt$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{\Delta m u}{m_0 - \Delta m t} = \frac{-\dot{m}}{m} u \Rightarrow \boxed{dv = -\frac{dm}{m} u}$$

(ou encore  $m \dot{v} = -\dot{m} u$ )  $\int$

4.)  $\int_{v_0}^{v_0 + \Delta v} dv = -u \int_{m_0}^{m_0 - \Delta m} \frac{dm}{m} \Rightarrow \Delta v = -u \ln \left( \frac{m_0 - \Delta m}{m_0} \right)$

$$\Rightarrow \Delta v = -u \ln \left( 1 - \frac{\Delta m}{m_0} \right)$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\Delta m}{m_0} = \exp \left( -\frac{\Delta v}{u} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta m}{m_0} = 1 - e^{-\frac{\Delta v}{u}}$$

$$\Rightarrow \Delta m = m_0 \left( 1 - e^{-\frac{\Delta v}{u}} \right) = 0,52 \cdot 10^3 \text{ kg.}$$

Pour donner à la masse linéique de la corde ?

1er modèle, on la néglige

$$L_0 = l + l - 3A = 2l - 3A$$

$$mgh + 0 \approx 0 + \frac{1}{2} m v^2 \approx m g z_{\text{min}} + \frac{1}{2} \frac{Y S}{L_0} (0 - z_{\text{min}})^2$$

$$H = z_{\text{min}} + \frac{Y S}{2 L_0 m g} z_{\text{min}}^2$$

$$z_{\text{min}}^2 + \frac{2 L_0 m g}{Y S} z_{\text{min}} - \frac{2 L_0 m g}{Y S} H = 0$$

$$\Delta' = \frac{L_0^2 m^2 g^2}{Y^2 S^2} + \frac{2 L_0 m g}{Y S} H$$

$$z_{\text{min}} = - \frac{L_0 m g}{Y S} \pm \sqrt{\Delta'}$$

↑ car  $z_{\text{min}} < 0$

$$\text{et } F_{\text{max}} = \frac{Y S}{L_0} \times (-z_{\text{min}})$$

$$F_{\text{max}} = m g + \sqrt{m^2 g^2 + \frac{2 m g H Y S}{L_0}}$$

### MEC-11: Puits infini de potentiel quantique (Johan THIEBAUT CCINP 2021, Arthur PERRIN CCP 2017)

1. Par continuité, la probabilité de présence de la particule en  $x = 0$  et en  $x = L$  est nulle.
2. Donc  $\psi$  s'annule en 0 et  $L$ ; l'annulation en  $L$  donne  $\lambda = \frac{2L}{n}$ , avec  $n$  entier positif.
3. La quantité de mouvement est  $p = \frac{h}{\lambda}$ . L'énergie se résume à l'énergie cinétique  $\frac{p^2}{2m}$  puisque l'énergie potentielle est nulle dans tout le puits. Pour chaque  $n$ , on a donc  $E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$ .

4. Les différents niveaux d'énergie que la particule peut avoir correspondent aux  $E_n$  pour les différentes valeurs de  $n$ , entier positif. Le fondamental pour  $n = 1$ , et les états excités pour  $n > 1$ .

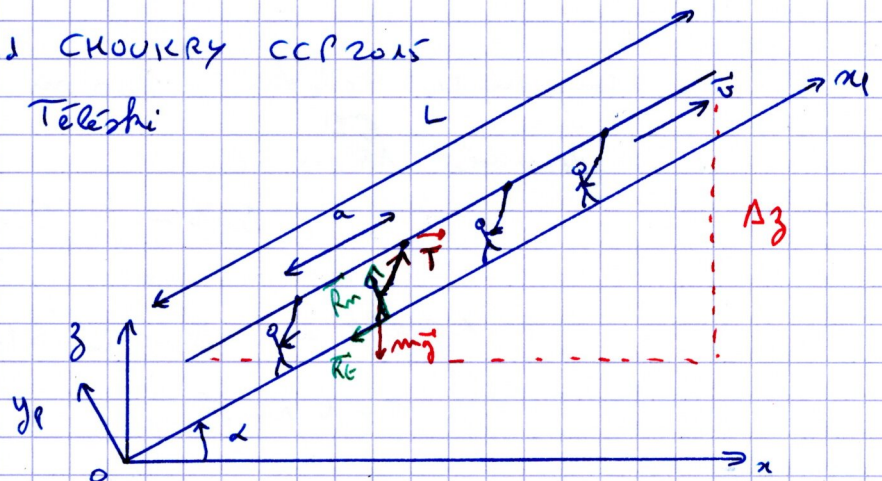
5. Les fréquences  $\nu$  des photons que la particule peut émettre ou absorber vérifient  $h\nu = |E_m - E_k| = \frac{h^2}{8mL^2} |m^2 - k^2|$ . La plus petite fréquence correspond à  $m = 2$  et  $k = 1$  :  $\nu_{min} = \frac{3h}{8mL^2}$ .

6. On détermine  $A$  en écrivant que la somme des probabilités vaut 1 :  $\int_0^L |\psi^2(x, t)| dx = 1$ . On trouve  $A = \sqrt{\frac{2}{L}}$ . L'amplitude de la probabilité de présence pour  $n = 1$  est une fonction de  $x$  avec un maximum en  $L/2$ , et qui s'annule en 0 et  $L$ . Pour  $n = 2$ , il y a deux bosses, et une annulation en  $L/2$ .

**MEC-12: Couleur de la tomate, méca Q (Mélicca HENRIET CCP 2018)**

**MEC-13: Télési (Alexandra PIOCH CCINP 2021, Guillaume VERRIER CCP 2017, Saad CHOUKRY CCP 2015), Pb ouvert**

Téléski



\* Le nombre de skieurs

maximal à faire remonter

$$\text{est } N = \frac{L}{a} + 1 \left( \approx \frac{L}{a} \right)$$

$$* \alpha = \arcsin\left(\frac{\Delta z}{L}\right)$$

\* Pour un skieur : BAME :  $m\vec{g}$ ,  $\vec{T}$ ,  $\vec{R}_t$ ,  $\vec{R}_n$ . Pour simplifier, on suppose que  $\vec{T} \approx$  parallèle à  $Ox$ , ce qui est assez vrai en pratique.

$$* \text{TRD pour 1 skieur: } m\vec{g} + \vec{T} + \vec{R}_n + \vec{R}_t = \vec{0}$$

$$/Ox \Rightarrow T = R_t + mg \sin \alpha$$

$$/Oy \Rightarrow R_n = mg \cos \alpha \Rightarrow T = mg (\sin \alpha + f \cos \alpha)$$

$$\text{Coulomb} \Rightarrow R_t = f R_n$$

$$* \text{ Pour les } N \text{ skieurs, } T_{\text{tot}} = \left( \frac{L}{a} + 1 \right) mg (\sin \alpha + f \cos \alpha)$$

où  $m$  = la masse moyenne d'un skieur.

Pour dimensionner, avec de la marge, l'installation, on prendra

$$m = 90 \text{ kg (skieurs + équipements)}$$

$$* \text{ Puissance du moteur mécanique: } P_{\text{méca}} = T_{\text{tot}} v \approx 40 \text{ kW}$$

\* Puissance électrique nécessaire, si on prend un rendement du moteur + variateur + réducteur  $\eta = 70\%$  :

$$P_{\text{élec}} = \frac{P_{\text{méca}}}{\eta} \approx 57 \text{ kW} \rightarrow \text{prendre } 100 \text{ kW.}$$

#### MEC-14: Masse ressort avec ou sans frottements visqueux (Victor Guyot CCP 2017)

Dans le cas a,  $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$ , d'où la période  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ .

Dans le cas b,  $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{6\pi\eta R}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$ , d'où le discriminant de l'équation caractéristique :  $\Delta = \left(\frac{6\pi\eta R}{m}\right)^2 - 4\omega^2$ , dont on sait

qu'il est négatif puisque le régime est pseudo-périodique. La pseudo-pulsation est  $\omega' = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$ , et la pseudo-période  $T' = \frac{2\pi}{\omega'}$ .

$$\text{Il vient } R = \frac{m}{3\pi\eta} \sqrt{\omega^2 - \omega'^2}, \text{ ou encore } R = \frac{2m}{3\eta} \sqrt{\frac{1}{T^2} - \frac{1}{T'^2}}.$$

Avec les valeurs numériques communiquées, on obtient  $R$  de l'ordre de 2 cm, et un Reynolds inférieur à  $2.10^3$ .

### MEC-15: Spectromètre pour séparation des isotopes du carbone (Matija MARINKOVIC CCP 2017)

On commence par chercher la vitesse à laquelle les ions arrivent dans la zone où règne un champ magnétique : le plus rapide est de passer par un raisonnement énergétique (mais on peut aussi passer par la dynamique) : le théorème de l'énergie cinétique

$$\text{pour l'ion "i" s'écrit } \frac{1}{2} m_i v_i^2 - 0 = eU, \text{ d'où } v_i = \sqrt{\frac{2eU}{m_i}}.$$

Ensuite, les ions sont déviés par le champ magnétique. Si l'interrogeur accepte que vous admettiez que le mouvement est circulaire uniforme, on peut utiliser le PFD pour un ion, puis le projeter dans la base vectorielle des coordonnées cylindro-polaires

$$\text{(avec } \vec{B} = -B\vec{e}_z), \text{ ou bien prendre la norme des vecteurs. On a } m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = e\vec{v}_i \wedge \vec{B}, \text{ d'où } -m_i \frac{v_i^2}{R_i} \vec{e}_r = e v_i \vec{e}_\theta \wedge (-B)\vec{e}_z, \text{ puis } R_i = \frac{m v_i}{eB}.$$

Ainsi, pour chaque ion  $i$ , l'encombrement selon  $(Oy)$  sera  $2R_i = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2Um_i}{e}}$ . Le plus grand encombrement est pour le carbone 14, et vaut  $2R_{C^{14}} = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2Um_{C^{14}}}{e}}$ .

$$\text{L'écart entre les deux détecteurs est donné par } \Delta y = 2(R_{C^{14}} - R_{C^{12}}) = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2U}{e}} (\sqrt{m_{C^{14}}} - \sqrt{m_{C^{12}}}).$$

Le rapport de l'encombrement sur l'écart des détecteurs est  $\frac{\Delta y}{2R_{C^{14}}}$ , qui vaut environ 13. Pour que cela tienne sur une table et que les isotopes soient séparés, il faut  $2R_{C^{14}}$  de l'ordre de 50 cm, ce qui donne  $\Delta y = 3,7$  cm et  $B = 6.8 \times 10^{-2}$  T.

Si l'examineur exige une démonstration du caractère circulaire du mouvement dans le champ magnétique, il faut projeter le PFD en coordonnées cartésiennes. On obtient 2 équations différentielles couplées. Il y a ensuite 2 méthodes possibles : on dérive l'une par rapport au temps et on reporte dans l'autre. Ou bien on introduit un complexe  $\underline{v} = v_x + jv_y$  et on obtient avec les 2 équations différentielles couplées une équation différentielle complexe unique, du premier ordre, qu'on résout dans le corps des complexes.

### MEC-16: Camion sur route bosselée (Jules MARTI Mines 2016)

1. En choisissant  $h = 0$  à mi-hauteur, et en supposant que la roue est sur un sommet en  $x = 0$ , on a  $h(t) = \frac{H}{2} \cos\left(\frac{2\pi vt}{L}\right)$ .

2. On applique le PFD au camion, et on projette sur l'axe vertical :  $m \frac{d^2 y}{dt^2} = k(h - y + y_0)$ , puisque pour  $h = Cte = 0$ ,  $y = Cte = y_0$ ,

$y_0$  étant la position verticale au repos, qui tient compte du poids. On pose  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $\omega_1 = \frac{2\pi v}{L}$ . La solution est la somme de la SPEC et de la SGESSM. Pour trouver la SPEC, le plus rapide est d'utiliser la notation complexe, comme en électricité. On obtient

$$y(t) = y_0 + \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \frac{H}{2} \cos(\omega_1 t) + A \cos(\omega_0 t + \phi).$$

3. On tient compte à présent de l'amortisseur. Il y a en plus une force de frottements  $\vec{F}_{frott} = -\alpha \left( \frac{dy}{dt} - \frac{dh}{dt} \right) \vec{e}_y$ . Cette fois, la SGESSM s'atténue au fil du temps; en régime sinusoïdal établi, on n'en tient plus compte :

$$y(t) = y_0 + \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + \frac{\alpha^2 \omega_1^2}{m^2}}} \frac{H}{2} \cos\left(\omega_1 t - \arctan\left(\frac{\alpha \omega_1}{m(\omega_0^2 - \omega_1^2)}\right)\right).$$

### MEC-17: Le lance-pierre (Olivier DAVID CCP 2015), Pb ouvert

$$v = \frac{F}{\sqrt{km}}.$$

### MEC-18: Changement d'orbite

MC 15. MEC-6 en 14-15 Transfert d'orbite

1°) Géocentrique : centre de la terre + 3 étoiles lointaines

2°)  $-\frac{GM_T}{r^2} = -\frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$  et  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{r}$

$\Rightarrow T = 2\pi \frac{r}{v} = \frac{2\pi r \sqrt{r}}{\sqrt{GM_T}}$

3°)  $E_c = \frac{1}{2} \frac{m v^2}{r}$      $E_p = -\frac{GmM_T}{r}$      $E_{tot} = -\frac{GmM_T}{2r}$

>> car toujours!

<0 car ~~est~~ multiplié par 2

<0 car état lié et ne va jamais à l'infini

4°) Cercle R1  $\Rightarrow E_{m1} = -\frac{GmM_T}{2R_1}$  et  $v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_1}}$      $\Delta E_A = E_{m2} - E_{m1}$

Ellipse, en A  $\Rightarrow v'_1$ , et  $E_{m2}$

Ellipse, en B  $\Rightarrow v_2$ , et  $E_{m2}$

Cercle R2  $\Rightarrow E_{m3} = -\frac{GmM_T}{2R_2}$  et  $v'_2 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_2}} = \frac{v_1}{\alpha}$      $\Delta E_B = E_{m3} - E_{m2}$

\* Cons<sup>o</sup>  $E_{tot} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{GmM_T}{R_2} = \frac{1}{2} m v_1'^2 - \frac{GmM_T}{R_1}$  (1)

\* Cons<sup>o</sup>  $\vec{v}_0 \Rightarrow m R_1 v_1' = m R_2 v_2 \Rightarrow R_1 v_1' = R_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{v_1'}{\alpha}$  (2)

(1) + (2)  $\Rightarrow \frac{1}{2} m v_1'^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) = \frac{GmM_T}{R_1} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$

$\Rightarrow v_1'^2 = \frac{2GM_T}{R_1 \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)} \Rightarrow v_1' = \sqrt{\frac{2GM_T \alpha}{R_1(1+\alpha)}}$

$E_{m2} = \frac{1}{2} m v_1'^2 - \frac{GmM_T}{R_1} = \frac{m GM_T \alpha}{R_1(1+\alpha)} - \frac{m GM_T}{R_1} = \frac{GmM_T}{2R_1} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} - \frac{1+\alpha}{1+\alpha}\right)$

$E_{m2} = -\frac{GmM_T}{R_1(1+\alpha)}$

$\Delta E_A = E_{m2} - E_{m1} = \frac{GmM_T}{R_1} \left(-\frac{2}{2(1+\alpha)} + \frac{1+\alpha}{2(1+\alpha)}\right)$

$\Delta E_A = \frac{\alpha-1}{1+\alpha} \frac{GmM_T}{2R_1}$

$\frac{\Delta E_A}{E_{m1}} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$

$\Delta E_B = E_{m3} - E_{m2} = -\frac{GmM_T}{2\alpha R_1} + \frac{GmM_T}{R_1(1+\alpha)} = \frac{GmM_T}{2R_1} \left(-\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{1+\alpha}\right)$

$\Delta E_B = \frac{GmM_T}{2R_1} \left(\frac{2\alpha-1-\alpha}{\alpha(1+\alpha)}\right) = \frac{GmM_T}{2R_1} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha(1+\alpha)}\right)$

$\frac{\Delta E_B}{E_{m2}} = \frac{1+\alpha}{2\alpha}$

$\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 = \alpha^3$

⚠  $\Delta E_A > 0$ ,  $\Delta E_B > 0$  mais  $\frac{\Delta E_A}{E_{m1}} < 0$  et  $\frac{\Delta E_B}{E_{m2}} < 0$  car  $E_{mi} < 0$

Durée du transfert :  $\Delta t$  est la moitié de la période de l'orbite elliptique. Or cette orbite a un demi grand-axe  $a$  qui vérifie  $2a = R_1 + R_2$ , donc  $\Delta t = \frac{\pi (R_1 + R_2)^{3/2}}{2\sqrt{2GM_T}}$ .

1. Rayon de l'orbite géostationnaire :  $r_{géo} = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} = 42 \times 10^3$  km, d'où une altitude de  $36 \times 10^3$  km.

2. Quel modèle choisir pour la force de frottements visqueux : une force en  $v$  ou en  $v^2$ ? Cela dépend du nombre de Reynolds. Dans les hautes couches, la vitesse est élevée, mais la masse volumique est très très faible. Que dire de la viscosité, qui doit être très faible également ...? En fait, il n'est pas simple de se convaincre que la force sera plutôt en  $v$  ou plutôt en  $v^2$ . Et à cette altitude, on ne peut plus vraiment considérer l'atmosphère résiduelle comme un milieu continu. Mais à cette altitude, la température n'est pas très faible, donc la viscosité non plus (la viscosité d'un gaz augmente avec la température, contrairement à celle d'un liquide). Donc le nombre de Reynolds doit être très faible. Et vue, la question qui suit, la réponse attendue est : "une force en  $v$ ".

3. Th du moment cinétique en  $O$ , centre de la Terre :  $\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = r\vec{e}_r \wedge (-\alpha\vec{v})$ , qui conduit à  $\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} + \frac{\vec{\sigma}_O}{\tau} = \vec{0}$ , avec  $\tau = \frac{m}{\alpha}$ . La solution est  $\vec{\sigma}(t) = \vec{\sigma}(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ .

Sur une orbite d'attente à 200 km, on trouve un temps caractéristique  $\tau$  de l'ordre de 2 mois; il ne faut donc pas laisser trop longtemps un satellite sur une telle orbite d'attente.

### MEC-20: Satellite freiné (Lancelot PREGNIARD Mines-Ponts 2016), Pb ouvert

En norme,  $\sigma = rvm$ . Le théorème du moment cinétique appliqué au satellite dans le référentiel géocentrique donne, après projection sur l'axe ( $Oz$ ) perpendiculaire au plan du mouvement :  $\frac{d\sigma}{dt} = -Arv^\alpha$ , ou encore  $m\frac{d(rv)}{dt} = -Arv^\alpha$ , puis  $\frac{d(rv)}{(rv)^\alpha} = -\frac{A}{m}r^{(1-\alpha)}dt$ , ou encore  $\frac{d(rv)}{(rv)^\alpha} = \frac{A}{um}r^{(1-\alpha)}dr$ , qui s'intègre en  $\frac{1}{(1-\alpha)(rv)^{\alpha-1}} = \frac{A}{um} \frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha} + Cte$ . Puisque la trajectoire reste très proche d'un cercle, on remplace, dans le membre de gauche  $v$  par  $\sqrt{\frac{GM_T}{r}}$ , d'où  $\frac{1}{(1-\alpha)(GM_T r)^{(\alpha-1)/2}} = \frac{A}{um} \frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha} + Cte$ . La constante additive est donc nulle et, de plus,  $\frac{\alpha-1}{2} = \alpha-2$ , d'où  $\alpha = 3$ . En identifiant les coefficients de chaque côté, on a  $A = \frac{um}{2GM_T}$ .

### MEC-21: Expérience de Millikan(Centrale)

1.)  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - 6\pi\eta r \vec{v}$

$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \vec{g} \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{g}\tau + \vec{A}e^{-t/\tau}$

$\tau = \frac{m}{6\pi\eta r}$

$\vec{v}(0) = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{g}\tau(1 - e^{-t/\tau})$

2.)  $\eta$  en Pa.s En effet,  $\|\vec{F}_R\| = 6\pi\eta r v \Rightarrow \text{kg m s}^{-2} = (\text{unité de } \eta) \times \text{m} \times \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

$\Rightarrow \eta$  en  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  car  $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \times \frac{1}{\text{m}^2} \times \text{s}$

3.)  $\Delta t \approx 3\tau \Rightarrow \Delta t \approx \frac{m}{2\pi\eta r} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{2\pi\eta r} = \frac{2}{3} \frac{r^2 \rho}{\eta}$

A.N.  $\Delta t = \frac{2}{3} \times \frac{4 \cdot 10^{-12} \times 914,3}{1,831 \cdot 10^{-5}} \approx 10^{-4} \text{ s} \Rightarrow \approx \text{instantané}$

4.)  $v_e = g\tau = \frac{mg}{6\pi\eta r} = \frac{2}{9} \times \frac{r^2 \rho}{\eta} \approx 0,3 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$

5.)  $r = \sqrt{\frac{9\eta v_e}{2\rho g}} = 1,04 \mu\text{m}$

car  $v_e = \frac{7,06 \cdot 10^{-3}}{60}$

6.) on veut une force électrique  $\uparrow$  ; or  $\vec{F}_e = q\vec{E}$  et  $q < 0$  donc il faut un champ  $\vec{E} \downarrow$  donc  $U \uparrow$

$\vec{E} = -\frac{U}{d} \vec{u}_z$  En effet,  $\vec{E} \approx$  uniforme et  $\vec{E} = -\text{grad } V$   
 et  $U = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{z_A}^{z_B} E \vec{u}_z \cdot dz \vec{u}_z = E(z_B - z_A) = -Ed$

7.)  $\vec{F}_e = -m\vec{g} \Rightarrow -e\vec{E} = -m\vec{g} \Rightarrow \frac{eU_0 \vec{u}_z}{d} = mg \vec{u}_z \Rightarrow U_0 = \frac{mgd}{e} = 5,27 \text{ kV}$   
 $U_0 = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho d \frac{e}{e}$

8.) Si  $\vec{F}_e \neq -m\vec{g}$ ,  $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \vec{g} - \frac{e}{m} \vec{E}$   
 $\Rightarrow \vec{v}' = \tau \left( \vec{g} - \frac{e}{m} \vec{E} \right)$   $\Rightarrow$  la mesure de  $v_e'$  donne accès à  $e$  et il a dû mesurer  $r$  de la goutte mesurée.

Particule dans un champ électrique et un champ magnétique parallèles entre eux.

1. On applique le principe fondamental de la dynamique à la charge  $q$  dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen, et on la projette sur les 3 axes des coordonnées cartésiennes :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = qE\vec{e}_z + q\vec{v} \wedge B\vec{e}_z, \text{ d'où :}$$

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = qBv_y & (1) \\ m \frac{dv_y}{dt} = -qBv_x & (2) \\ m \frac{dv_z}{dt} = qE & (3) \end{cases}$$

L'équation (3) conduit à  $v_z(t) = \frac{qE}{m}t$ .

Pour résoudre le système formé des deux premières, on peut utiliser plusieurs méthodes.

*Méthode 1 :*

On invente un nombre complexe  $\underline{\beta} = v_y + i v_x$ . Les équations (1) et (2) conduisent à  $\frac{d\underline{\beta}}{dt} = i\omega\underline{\beta}$ , avec  $\omega = \frac{qB}{m}$ , d'où  $\underline{\beta}(t) = \underline{A}e^{i\omega t}$ . On trouve la constante  $\underline{A}$  en se plaçant à  $t = 0$  :  $\underline{A} = v_0$ .

On en déduit  $v_x(t) = v_0 \sin(\omega t)$  et  $v_y(t) = v_0 \cos(\omega t)$ .

*Méthode 2 :*

On dérive (1) par rapport au temps et on y injecte (2) :

$\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \omega^2 v_x = 0$ , avec  $\omega = \frac{qB}{m}$ , d'où  $v_x(t) = A_1 \sin(\omega t) + B_1 \cos(\omega t)$ . En utilisant les conditions initiales,  $B_1 = v_0$ .

On en déduit  $v_y(t) = \frac{1}{\omega} (A_1 \omega \cos(\omega t) - v_0 \omega \sin(\omega t))$ . En utilisant les conditions initiales,  $A_1 = 0$ .

On en déduit  $v_x(t) = v_0 \sin(\omega t)$  et  $v_y(t) = v_0 \cos(\omega t)$ .

On intègre une nouvelle fois ces équations, en tenant compte des conditions initiales :

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} (1 - \cos(\omega t));$$

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t);$$

$$z(t) = \frac{qE}{2m} t^2.$$

Ce sont les équations paramétriques cartésiennes de la trajectoire de la particule entre les plans  $P$  et  $P'$ . La trajectoire est une hélice d'axe  $(Oz)$ , de rayon  $\frac{v_0}{\omega}$ .

2. Puisque  $L \ll \frac{v_0}{\omega}$ ,  $P'$  est atteint pour  $t_1$  tel que  $\omega t_1 \ll \pi/2$ , donc  $L \simeq \frac{v_0}{\omega} \omega t_1 = v_0 t_1$ , d'où  $x_1 = \frac{L^2 \omega}{2v_0}$ ,  $y_1 = L$  et  $z_1 = \frac{qE}{2m} \frac{L^2}{v_0^2}$ .

Et à cette position, la vitesse est  $v_{x1} \simeq \omega L$ ,  $v_{y1} \simeq v_0$  et  $v_{z1} = \frac{qE}{m} \frac{L}{v_0}$ .

3. Entre les plaques  $P'$  et  $P''$ , le mouvement est "balistique", c'est-à-dire sans force, donc à vitesse constante, puisque la pesanteur est négligée. La charge arrive sur  $P''$  à  $t_2$  tel que  $v_{y1} 2(t_2 - t_1) = D$ , d'où  $t_2 - t_1 \simeq \frac{D}{v_0}$ .

$$x_2 = \frac{\omega L D}{v_0} = \frac{\omega L}{v_0} (D + L/2) = \frac{qBL}{mv_0} (D + L/2).$$

$$y_2 = L + D.$$

$$z_2 = \frac{qEL}{mv_0^2} (D + L/2).$$

4.  $P''$  est un plan orthogonal à  $(Oy)$ , on y voit  $z_2$  en fonction de  $x_2$ , avec  $z_2 = \frac{E}{Bv_0} x_2$ .

Si  $\frac{q}{m}$  est fixé mais  $v_0$  variable, on voit que  $z_2 = \frac{mE}{qB^2 L (D + L/2)} x_2^2$ , ce qui donne une forme de parabole.

Si  $\frac{q}{m}$  quelconque mais  $v_0$  fixé, on voit que  $z_2 = \frac{E}{Bv_0} x_2$ , ce qui donne une forme de droite.