
Thermodynamique

THE-1: Atmosphère de Mars (CCINP 2025 Jules CHAMEROY, Nathanaël FERRIER) Fait en classe.

THE-2: Evaporation d'éther (CCINP 2024 Alban BURLET, Benjamin MARELILLE) Fait en classe.

THE-3: Ailette de refroidissement (Centrale 1, sans préparation 2024 Jonas VUILLEMIN) Fait en classe.

THE-4: Sac de couchage (CCINP 2025 Clotilde DELPLANQUE et CCINP 2024) Fait en classe.

THE-5: Bonbonne de diazote liquide (CCINP 2024 Jonas VUILLEMIN) Fait en classe.

THE-6: Le plumage d'une chouette (Lou GAUDARD CCINP 2023) Fait en classe.

THE-7: Banc Kofler (CCINP 2022 Leandros MURENA, Quentin MAILLARD-SALIN, CCP 2018 Sébastien MARTI, CCP 2017 Matthieu PETIT)

Fait en classe

THE-8: Hypothermie (Matthieu PETIT CCP 2018, Bilgehan TANRIVERDI CCP 2017, Gabriel CLERGET CCP 2016)

1. Source de courant qui débite dans deux branches en parallèle : l'une comprenant la capacité thermique $C = mc$ (analogue à un condensateur), l'autre contenant 2 résistances thermiques en série : celle du derme et celle des transferts conducto-convectifs.

En posant $w = \theta - \theta_{\text{mer}}$, $\frac{dw}{dt} + \frac{w}{\tau_1} = \frac{m\mathcal{P}}{C}$, avec $\tau_1 = \left(\frac{R_{S1}}{S} + \frac{1}{hS}\right)C$, d'où en appelant θ_n la température normale de 37 °C, $\theta(t) = \theta_{\text{mer}} + m\mathcal{P} \left(\frac{R_{S1}}{S} + \frac{1}{hS}\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)\right) + (\theta_n - \theta_{\text{mer}}) \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)$. L'hypothermie est atteinte à l'instant t_h pour lequel $\theta = \theta_h = 35$ °C. On trouve $t_h = 24$ minutes.

2. On reprend l'équation différentielle précédente mais en remplaçant $\left(\frac{R_{S1}}{S} + \frac{1}{hS}\right)$ par $\left(\frac{R_{S1}}{S} + \frac{1}{hS} + \frac{e}{S\lambda_n}\right)$. Il n'y a plus de risque d'hypothermie si la solution particulière de l'équation différentielle est supérieure à θ_h , c'est-à-dire si $\frac{e}{S\lambda_n} > \frac{\theta_h - \theta_{\text{mer}}}{m\mathcal{P}} - \frac{R_{S1}}{S} - \frac{1}{hS}$. On trouve $e > 3.8$ cm.

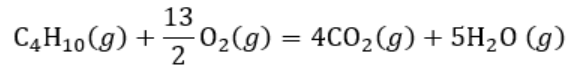
3. Cette épaisseur est trop importante pour une combinaison. Ceci dit, rester très très longtemps dans une eau à 17 °C mérite une combinaison en un autre matériau que le néoprène. Et la puissance dégagée par le nageur dépend sans doute de son activité physique.

THE-9: Bonbonne de butane pour cuire des pâtes (Mélissa HENRIET CCP 2018)

On note m_p la masse de la bouteille de butane pleine, et m_v sa masse vide. Et on note M la masse molaire du butane.

$$\text{Quantité de butane disponible : } n = \frac{m_p - m_v}{M}.$$

La réaction de combustion complète du butane est, avec obtention de l'eau vapeur (pour avoir le pouvoir calorifique inférieur, et pour traduire la réalité de l'expérience) :



On veut faire bouillir un volume d'eau V , que l'on va tenter d'estimer. Si on prévoit 200 g de pâtes par personne, il faudra en faire cuire $m_{pa} = 40$ kg. Si on considère qu'il faut 5L d'eau pour 1 kg de pâtes, on a alors $V = 200$ L. La masse d'eau correspondante est notée $m_e = 200$ kg.

On considère les 3 états suivants :

Etat 1 : m_e d'eau liquide à $T_{e1} = 290$ K, m_{Fe} de casserole à $T_1 = 293$ K, m_{pa} de pâtes à $T_1 = 293$ K, n moles de butane à $T_1 = 293$ K, $\frac{13}{2}n$ moles de dioxygène à $T_1 = 293$ K, $26n$ moles de diazote à $T_1 = 293$ K, le tout à $P_0 = 1$ bar.

Etat 2 : m_e d'eau liquide à $T_{e1} = 290$ K, m_{Fe} de casserole à $T_1 = 293$ K, m_{pa} de pâtes à $T_1 = 293$ K, $4n$ moles de $\text{CO}_2(g)$ à $T_1 = 293$ K, $5n$ moles d'eau vapeur à $T_1 = 293$ K, $26n$ moles de diazote à $T_1 = 293$ K, le tout à $P_0 = 1$ bar.

Etat 3 : m_e d'eau liquide à $T_2 = 373$ K, m_{Fe} de casserole à $T_2 = 373$ K, m_{pa} de pâtes à $T_2 = 373$ K, $4n$ moles de $\text{CO}_2(g)$ à $T_2 = 373$ K, $5n$ moles d'eau vapeur à $T_2 = 373$ K, $26n$ moles de diazote à $T_2 = 373$ K, le tout à $P_0 = 1$ bar.

On considère la transformation fictive qui fait passer de l'état 1 à l'état 2 puis de l'état 2 à l'état 3, de façon isobare.

$$\Delta H_{12} = \Delta_r H_0(\xi_f - \xi_i) = \Delta_r H_0 n.$$

$$\Delta H_{23} = m_e c_e (T_2 - T_{e1}) + m_{Fe} c_{Fe} (T_2 - T_1) + m_{pa} c_{blé} (T_2 - T_1) + 4n M_{\text{CO}_2} c_{\text{CO}_2} (T_2 - T_1) + 5n M_{\text{eau}} c_{\text{vap}} (T_2 - T_1) + 26n M_{\text{N}_2} c_{\text{N}_2} (T_2 - T_1).$$

Si le cuisinier prend bien soin de couvrir sa ou ses casseroles, on peut faire l'approximation (c'est difficile de faire mieux ici, les caractéristiques des ustensiles n'étant pas connues) que le système qu'on a considéré évolue de façon adiabatique, d'où $\Delta H_{12} + \Delta H_{23} = 0$, puisque la transformation est isobare. Et on ne va pas trop chipoter, on peut prendre $T_{e1} = T_1$. Il vient :

$$n = \frac{m_e c_e + m_{Fe} c_{Fe} + m_{pa} c_{blé}}{-\Delta_r H_0 - 4M_{\text{CO}_2} c_{\text{CO}_2} (T_2 - T_1) - 5M_{\text{eau}} c_{\text{vap}} (T_2 - T_1) - 26M_{\text{N}_2} c_{\text{N}_2} (T_2 - T_1)} (T_2 - T_1).$$

Numériquement, $n = 38$ mol.

Or, $\frac{m_p - m_v}{M} = 224$ mol. Il y a donc largement de quoi faire, même si on rajoute les effets des déperditions thermiques.

THE-10: Fusion d'un bloc de cuivre parcouru par un courant (Léo VERNEREY CCINP 2022) Si ça ne fond pas en régime stationnaire, ça ne fondra jamais. Donc on étudie le régime stationnaire.

$$\vec{j}_{cd} = j_{cd}(x)\vec{e}_x.$$

On applique le premier principe à une tranche dx pendant dt :

$$S j_{cd}(x) dt - S j_{cd}(x+dx) dt + \frac{j^2}{\gamma} S dx dt = 0.$$

$$\text{On obtient } j_{cd}(x) = \frac{j^2}{\gamma} x, \text{ puis } T(x) = \frac{j^2}{2\gamma\lambda} (a^2 - x^2) + T_0.$$

THE-11: Fusible (CCINP 2022 Nathan ARANDA, CCP 2015), Pb ouvert

On néglige les effets de bord $\Rightarrow T = T(r)$ et $\vec{j}_{cd} = j_{cd}(r) \vec{u}_r$
 on se place en régime stationnaire \Rightarrow en cylindrique.

Bilan sur une couronne cylindrique d'épaisseur dr et de longueur dz :

$$j_{cd}(r+dr) 2\pi(r+dr) dz = j_{cd}(r) 2\pi r dz + \frac{j^2}{\sigma} 2\pi r dr dz$$

avec $j = \frac{I}{\pi a^2}$, en notant a le rayon du cylindre.

$$\Rightarrow \frac{d}{dr} [r j_{cd}(r)] = r \frac{j^2}{\sigma}$$

$$\Rightarrow r j_{cd}(r) = \frac{r^2 j^2}{2\sigma} + K_1 \Rightarrow -\lambda \frac{dT}{dr} = \frac{r j^2}{2\sigma} + \frac{K_1}{r} = j_{cd}(r)$$

$$\Rightarrow T(r) = -\frac{r^2 j^2}{4\sigma\lambda} + \frac{K_1}{\lambda} \ln(r) + K_2$$

$$T(0) \text{ finie} \Rightarrow K_1 = 0$$

$$\Rightarrow T(r) = K_2 - \frac{j^2}{4\sigma\lambda} r^2$$

À la périphérie, $2\pi a dz j_{cd}(a) = h (T(a) - T_0) 2\pi a dz$

$$\Rightarrow \frac{a j^2}{2\sigma} = h \left(K_2 - \frac{j^2 a^2}{4\sigma\lambda} - T_0 \right)$$

$$\Rightarrow K_2 = T_0 + \frac{j^2 a^2}{4\sigma\lambda} + \frac{a j^2}{2\sigma h}$$

λ en $W K^{-1} m^{-1}$
 h en $W K^{-1} m^{-2}$

$$T(r) = T_0 + \frac{j^2}{2\sigma} \left[\frac{a}{h} + \frac{a^2 - r^2}{2\lambda} \right]$$

donc T est fonction décroissante de r . C'est au centre que ça commence à fondre.

Que vaut la température de surface :

$$T_{surf} = T(a) = T_0 + \frac{j^2 a}{2\sigma h} = T_0 + \frac{I^2}{2\pi^2 \sigma h a^3}$$

On veut que pour $I = I_{max}$, tout fonde

$$\text{donc } T_{fus} = T_0 + \frac{I_{max}^2}{2\pi^2 \sigma h a^3}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{I_{max}^2}{2\pi^2 \sigma h (T_{fus} - T_0)}} \quad \text{et } S = \pi a^2$$

$$S = \sqrt[3]{\frac{I_{max}^4}{4\pi \sigma h^2 (T_{fus} - T_0)^2}} = 4,17 \text{ mm}^2$$

1. $\vec{j}_n = -D \overrightarrow{\text{grad}} n$. $\vec{j}_n = -D \frac{dn}{dr}(r) \vec{e}_r$.

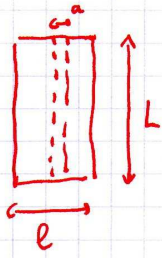
2. Régime stationnaire et pas de terme de création en dehors de la bactérie, donc le flux ϕ se conserve en dehors de la bactérie : $\phi(r) = Cte = K$ quel que soit $r > R$.

3. $K = -4\pi r^2 \times \left(-D \frac{dn}{dr}\right)$, d'où $n(r) = -\frac{K}{4\pi D r} + K' = -\frac{K}{4\pi D r} + c_0 \mathcal{N}_A$.

4. $A \times \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \mathcal{N}_A = K$, ce qui donne bien la relation, puisque $n(R) = n_1$.

5. Tout ceci n'est possible que si $n_1 > 0$, sinon, la bactérie consommerait trop et les équations conduiraient à une absurdité.

THE-13: Découpe laser (Martin BELLONCLE CCP 2018)



On pose :

N = nombre de plaques par heure
 $N_A = \frac{\text{nombre de plaques}}{\text{par s}}$

L = longueur de la découpe à faire par plaque = 1,10 m

S = section du laser. = $\frac{\pi a^2}{4} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$

e = épaisseur de la plaque.

l_f = chaleur latente de fusion du fer. = $247 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
 massique

μ = masse volumique du fer = $7,9 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

c = capacité thermique massique du fer = $460 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

dV = volume de fer à chauffer puis faire fondre pendant dt

\mathcal{P} = puissance du laser = 1,0 kW

T_a = T_{air} ambiante = 20°C

T_{fus} = T_{no} de fusion du fer. = 1538°C

{ $N dt$ plaques } au principe (pression = cté) pendant dt :

$$dV = N dt \cdot L e a = N dt \cdot L e 2 \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

$$dH = S Q \Rightarrow \mu dV [c(T_{\text{fus}} - T_a) + l_f] = \mathcal{P} dt$$

$$\Rightarrow \mu N L e 2 \sqrt{\frac{S}{\pi}} [c(T_{\text{fus}} - T_a) + l_f] = \mathcal{P}$$

$$\Rightarrow e = \frac{\mathcal{P}}{2 \mu N L \sqrt{\frac{S}{\pi}} [c(T_{\text{fus}} - T_a) + l_f]}$$

A.N.
$$e = \frac{10^3}{2 \times 7,9 \cdot 10^3 \times \frac{150}{3600} \times 1 \times \sqrt{\frac{5 \cdot 10^{-7}}{\pi}} \times [460(1538 - 20) + 247 \cdot 10^3]}$$

$$e = 4,2 \text{ mm}$$

Mais en pratique ce sera moins car

- on a négligé la conduction thermique et le rayonnement
- toute la puissance du laser ne rentre pas dans le fer.
- on s'est placé dans le calcul à la limite de la fusion

Conclusion : 1 ou 2 mm maxi

On suppose le régime thermique quasi-stationnaire car dir $\vec{j}_{cd} = 0$ en dehors du glaçon
 Pour $r > R(t)$, $\vec{j}_{cd} = \frac{K(t)}{r^2} \vec{u}_r$ avec $K(t) < 0$ on pose $T_0 = 0^\circ\text{C}$

$$-\lambda \frac{dT}{dr} = \frac{K}{r^2} \Rightarrow T(r) = \frac{K(t)}{\lambda r} + K'$$

$$T(\infty) = T_e \Rightarrow K' = T_e \Rightarrow K(t) = \lambda R(t) [T_0 - T_e]$$

$$T(R(t)) = T_0$$

{glaçon} se rétrécit pendant dt , au cours duquel $R(t)$ devient $R(t) + dR$ (avec $dR < 0$)

$$\mu_{gl} \pi R^2 \times (-dR) L_{fus} = - \frac{K(t)}{r^2} dt$$

$$\Rightarrow \mu_{gl} R^2 dR L_{fus} = \lambda R (T_0 - T_e) dt$$

$$\Rightarrow \mu_{gl} L_{fus} R dR = \lambda (T_0 - T_e) dt$$

$$\Rightarrow \mu_{gl} L_{fus} \left(\frac{R^2(t) - R_0^2}{2} \right) = \lambda (T_0 - T_e) t$$

$$\text{et } R(t_1) = 0 \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{\mu_{gl} L_{fus} R_0^2}{2\lambda (T_e - T_0)}}$$

THE-15: Isolation thermique d'un tuyau contenant de la vapeur (CCP 2018 Mélissa HENRIET)

Voir page suivante.

1) On a une association de 3 résistances thermiques en série

$$R_{th} = R_{ty} + R_{gain} + R_{air}$$

R_{ty} est une constante du problème

R_{gain} se calcule avec un modèle 2D, mais on peut

deviner que R_{gain} va augmenter avec l'épaisseur x

R_{air} , en revanche, est fonction décroissante de x , car

la résistance thermique de la conduction-convexion est

inversement proportionnelle à la surface de l'interface gainée/l'air.

Donc $R_{th} = R_{ty} + R_{gain}(x) + R_{air}(x)$ } Il y a certainement un optimum!

2) En 2D, pour des cylindres de longueur L et de rayons R_1 et R_2 ,

$$\phi_{cd} = c^t \forall r \Rightarrow j_{cd}(r) = \frac{\phi_{cd}}{2\pi r L} = -\lambda \frac{dT}{dr}$$

d'où $\frac{dT}{dr} = -\frac{\phi_{cd}}{2\pi \lambda r L}$ $T(r) = -\frac{\phi_{cd}}{2\pi \lambda L} \ln(r) + c^t$

$$T_1 - T_2 = \frac{\phi_{cd}}{2\pi \lambda L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad R_{th} = \frac{1}{2\pi \lambda L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Donc $R_{ty} = \frac{1}{2\pi \lambda_1 L} \ln\left(\frac{R_i + e}{R_i}\right)$ $R_{gain} = \frac{1}{2\pi \lambda_2 L} \ln\left(\frac{R_i + e + x}{R_i + e}\right)$

et $R_{air} = \frac{1}{h 2\pi L (R_i + e + x)}$

Le flux thermique qui sort de la vapeur est

$$\phi = \frac{T_i - T_e}{R_{ty} + R_{gain} + R_{air}}$$

ϕ est min pour $(R_{ty} + R_{gain} + R_{air})$ max

on pose $f(x) = R_{ty} + R_{gain}(x) + R_{air}(x)$ $f(x) = R_{th}(x)$

$$f(x) = R_{ty} + \frac{1}{2\pi \lambda_2 L} \ln\left(1 + \frac{x}{R_i + e}\right) + \frac{1}{2\pi h L (R_i + e) \left(1 + \frac{x}{R_i + e}\right)}$$

on pose $y = 1 + \frac{x}{R_i + e}$ $f(x) = g(y) = R_{ty} + A \ln(y) + \frac{B}{y}$

$g'(y) = 0 \Rightarrow \frac{A}{y} - \frac{B}{y^2} = 0 \Rightarrow y = \frac{B}{A} \Rightarrow 1 + \frac{x}{R_i + e} = \frac{\lambda_2}{h(R_i + e)}$

$\Rightarrow \left\{ x = \frac{\lambda_2}{h} - R_i - e \right\}$ Mais $g''(y) = -\frac{A}{y^2} + \frac{2B}{y^3} = \frac{1}{y^2} (-A + \frac{2B}{y}) = \frac{A}{y^2} > 0$

donc on a trouvé un maximum pour ϕ (car un min pour $R_{ty} + R_{gain} + R_{air}$)

Et le max de ϕ n'existe que pour $\lambda_2 > h(R_i + e)$

En fait, la fonction $R_{th}(x)$ a de fortes chances d'être

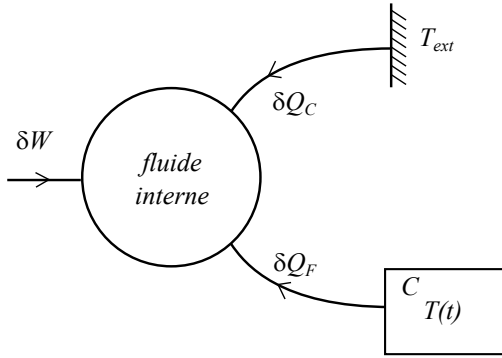
monotone croissante car gaine $\Rightarrow \lambda_2$ faible donc

pas de minimum pour $R_{th}(x)$

Et alors, plus x est grand, plus ϕ est faible.

Mais après, il y a un pt de court et d'encombrement!

THE-16: Climatiseur (CCP 2018 Thomas THEVENOT)



Tout d'abord, la puissance mécanique fournie par la pompe au climatiseur est $P_{mec} = \eta P_{comp}$.

On applique le premier principe de la thermodynamique au fluide interne du climatiseur, sur la durée d'un cycle (durée très petite devant celle cherchée, d'où les notations avec δ) :

$$\delta W + \delta Q_F + \delta Q_C = 0.$$

On applique le second principe de la thermodynamique au fluide interne du climatiseur, sur la durée d'un cycle, sachant que les transformations sont supposées réversibles :

$$\frac{\delta Q_F}{T(t)} + \frac{\delta Q_C}{T_{ext}} = 0.$$

Enfin, on applique le premier principe au local, qui évolue de façon isobare, toujours sur la durée d'un cycle, pour pouvoir réutiliser les mêmes grandeurs énergétiques :

$$dH = -\delta Q_F.$$

C'est-à-dire :

$$CdT = -\delta Q_F.$$

En exploitant ces trois équations, on obtient :

$$\delta W - CdT + CT_{ext} \frac{dT}{T} = 0, \text{ d'où } \eta P_{comp} dt = CdT - CT_{ext} \frac{dT}{T}.$$

On intègre, pour le temps de 0 à t_f , et pour la température de T_{ext} à T_f :

$$\eta P_{comp} t_f = C(T_f - T_{ext}) - CT_{ext} \ln\left(\frac{T_f}{T_{ext}}\right), \text{ d'où } t_f.$$

Numériquement, on trouve 53 s.

THE-17: Expérience de Jean PERRIN (William BONGUET CCP 2017)

1. Courte focale, temps de pose court (car les sphérules sont agitées thermiquement), diaphragme très ouvert à la fois pour avoir une faible profondeur de champ et pour avoir assez de lumière qui entre.

2. Compétition entre l'agitation thermique et les contraintes mécaniques (poids et poussée d'Archimède).

3. $m_{app} = \frac{4}{3}\pi r^3 (\mu - \mu_e) = 0.762 \times 10^{-17} \text{ kg}.$

4. Mouvements à l'échelle microscopiques qui tendent à uniformiser les concentrations. Ex : parfum dans une pièce.

5. $H = \frac{k_B T}{m_{app} g} = \frac{RT}{\mathcal{N}_A m_{app} g}.$

6. Il faudrait un solvant de masse volumique $\mu' > \mu_e$.

7. Grâce aux photos, on compte le nombre de sphérules dans différentes tranches, ce qui permet de déterminer H , donc \mathcal{N}_A .

8. $\mathcal{N}_A = \frac{RT}{mg(z_2 - z_1)} \ln\left(\frac{n_1}{n_2}\right) = 6.4 \times 10^{23}.$

THE-18: Pression au Mont-Blanc (Jérémy ROBERT CCP 2017, Pb ouvert)

$\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{R} \frac{dz}{T_0 - az}, \text{ d'où } P(z) = P_0 \left(1 - \frac{az}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{aR}}.$ En haut du Mont-Blanc, on obtient 0,55 bar, pour $T_0 = 290\text{K}.$

THE-19: Moteur thermique (Nicolas ARBEZ CCP 2016)

1. Cf cours

2. $\eta = 1 + \frac{P_F}{P_C}.$

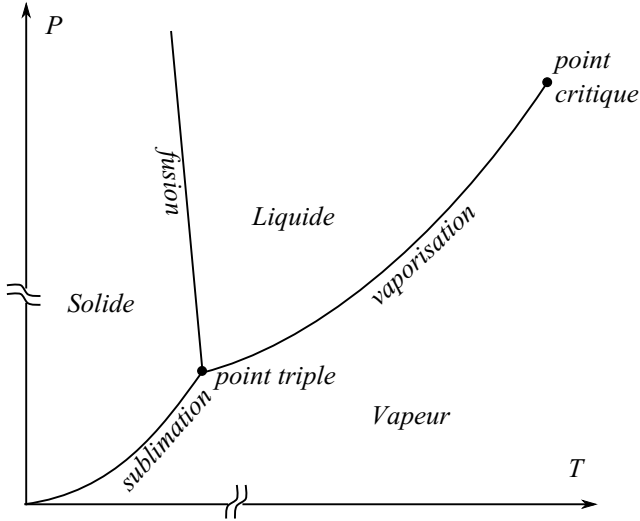
3. Rendement maximal si transformations toutes réversibles (moteur de Carnot). On obtient $\eta_{max} = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 0,62.$

4. $P_C = \frac{P_m}{\eta} = 269\text{MW}.$ $P_F = P_m \left(1 - \frac{1}{\eta}\right) = -169\text{MW}.$

5. $T_s - T_e = -\frac{P_F}{\mu D_v c_p} = 0.40\text{K} = 0,40 \text{ }^\circ\text{C}.$

THE-20: Expérience de Tyndall (CCINP 2021 Dorian FENOY, CCP 2017 Max POULHES)

1. Voir figure ci-dessous.
2. Voir figure.
3. Voir figure; le point triple est le seul lieu de coexistence des trois phases. Le point critique est le point au-delà duquel il n'y a plus de séparation entre liquide et vapeur.
4. Particularité de l'eau : la pente de la courbe de fusion est négative.
5. Sous l'action de la masse, la pression sous le fil est importante et, compte tenu de la particularité de l'eau (cf question précédente), il y a changement d'état solide \rightarrow liquide; mais une fois le fil passé, la pression retrouve sa valeur initiale.



THE-21: Éponge sphérique qui sèche (ODLT et Base Oraux 2015), Pb ouvert

$$1) \quad P_{\text{ext}} \leq P_{\text{sat}}$$

2) Pour $r = R(t)$, il n'y a dans la phase gazeuse \approx que de la vapeur d'eau: $P = P_{\text{eau}} = P_{\text{sat}}$, car \approx équilibre liquide-vapeur.

$$\text{Modèle du gaz parfait} \Rightarrow n(R(t), t) = \frac{P_{\text{sat}}}{RT} N_A \quad (1)$$

Pour $r = R_0$, on retrouve l'atmosphère "moyenne", avec

$$P_{\text{eau}} = P_{\text{ext}}, \text{ et } n(R_0, t) = \frac{P_{\text{ext}}}{RT} N_A \quad (2)$$

$$3) \quad \text{Loi de Fick: } \vec{j}_m = -D \vec{\text{grad}} n$$

Symétrie sphérique $\Rightarrow \vec{j}_m = j_m(r, t) \vec{u}_r$ en coordonnées sphériques.
(ou même $n = n(r, t)$)

Et (régime \approx stationnaire, car quasi-stationnaire)

$$\hookrightarrow \varphi(r, t) = \varphi(t) = j_m(r, t) 4\pi r^2$$

$$\text{Donc } -D \frac{\partial n}{\partial r} = \frac{\varphi(t)}{4\pi r^2} \quad (3) \quad \underline{\text{OK}}$$

$$4) \quad (3) \Rightarrow n(r, t) = \frac{\varphi(t)}{4\pi r^2} + A(t)$$

$$(1) \Rightarrow N_A \frac{P_{\text{sat}}}{RT} = \frac{\varphi(t)}{4\pi R(t) D} + A(t) \quad (4)$$

$$(2) \Rightarrow N_A \frac{P_{\text{ext}}}{RT} = \frac{\varphi(t)}{4\pi R_0 D} + A(t) \quad (5)$$

$$(4) - (5) \Rightarrow \frac{\varphi(t)}{4\pi D} \left(\frac{1}{R(t)} - \frac{1}{R_0} \right) = \frac{P_{\text{sat}} - P_{\text{ext}}}{RT} N_A$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(t)}{4\pi D} = \frac{R_0 R(t)}{R_0 - R(t)} \frac{(P_{\text{sat}} - P_{\text{ext}})}{RT} N_A \quad (6)$$

$$\text{et } (6) \Rightarrow A(t) = \frac{P_{\text{sat}} N_A}{RT} + \frac{R_0}{R(t) - R_0} \frac{(P_{\text{sat}} - P_{\text{ext}})}{RT} N_A$$

$$n(r, t) = N_A \frac{R_0 (P_{\text{sat}} - P_{\text{ext}})}{RT (R_0 - R(t))} \left[\frac{R(t)}{r} - 1 \right] + \frac{P_{\text{sat}}}{RT} N_A$$

$$5) \quad \varphi(t) = 4\pi R^2(t) \left(-\frac{dR}{dt} \right) m_{\text{liq}}$$

$$(6) \Rightarrow -4\pi m_{\text{liq}} R^2(t) \frac{dR}{dt} = \frac{R_0 R(t)}{R_0 - R(t)} \frac{P_{\text{sat}} - P_{\text{ext}}}{RT} 4\pi D N_A$$

$$\Rightarrow \frac{dR}{dt} = -\frac{D}{R_0 T m_{\text{liq}}} (P_{\text{sat}} - P_{\text{ext}}) \frac{R_0}{R(t) (R_0 - R(t))} N_A$$

$$6^{\circ}) (R_0 R - R^2) dR = - \frac{R_0 D (P_{\text{sat}} - P_{\text{ext}})}{\underbrace{\rho_0 T M_{\text{eq}}}_{\alpha}} dt$$

$$\Rightarrow \frac{R_0 R^2}{2} - \frac{R^3}{3} = - \alpha t + B$$

$$\text{Et } t=0, \alpha t = 0, R(t) = R_0, \quad B = \frac{R_0^3}{6}$$

$$\Rightarrow R^2(t) \left(\frac{R_0}{2} - \frac{R(t)}{3} \right) = - \frac{R_0 D (P_{\text{sat}} - P_{\text{ext}})}{\rho_0 T M_{\text{eq}}} t + \frac{R_0^3}{6}$$