

# Electromagnétisme

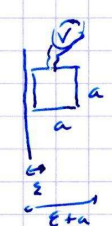
## ELMGN-1: Une fameuse expérience du Palais de la Découverte (Centrale Mathilde ALLEMAND 2025)

Fait en classe.

### ELMGN-2: Ligne haute tension et cadre (Eloan LEHEC CCINP 2024, Thibaut ROLAND CCP 2015)

1°) En coordonnées cylindriques,  $\vec{B} = B(r, \theta) \vec{u}_\theta$   
 $2\pi r B(r, \theta) = \mu_0 I(t) \rightarrow \vec{B}(r, \theta) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} \vec{u}_\theta$

2°)  $\mu_0$  s perméabilité magnétique, en  $\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$   
 car  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$   $\Rightarrow \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \times 2\pi r = \mu_0 I$

3°) 

$\mu = \epsilon = -N \frac{d\phi}{dt}$   
 $d\phi = a \int_{\epsilon}^{a+\epsilon} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} a \ln\left(\frac{a+\epsilon}{\epsilon}\right)$

note AC car au DC, on trouve 0!

4°) Calcul fait au 3°)

avec  $\epsilon = 2,0 \text{ cm}$  et  $a = 30 \text{ cm}$

$\Rightarrow \mu(t) = -\frac{N \mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{a+\epsilon}{\epsilon}\right) (-\omega I_{\text{eff}} \sqrt{2} \sin(\omega t))$

si  $i(t) = I_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t)$

$U_{\text{eff}} = \frac{\mu_0 N a}{2\pi} \omega I_{\text{eff}} \ln\left(\frac{a+\epsilon}{\epsilon}\right)$

Pour la spine, le voltmètre affiche  $U_{\text{eff}} = \frac{2\pi \cdot 10^{-7}}{\pi} \times 0,3 \times 1000 \times 50 \cdot 6^3 \times \ln\left(\frac{32}{2}\right)$

$\Rightarrow U_{\text{eff}} = 2,6 \text{ V}$

$\Rightarrow$  la seule spine suffit --- ?

## ELMGN-3: Charge dans le champ électrique créé par un fil infini (CCINP Mathieu ROBERT 2023, Elie POCHARD 2022)

EMG 24.1 charge  $(-q)$  à  $s$  le  $r$  sur  $l \ll r \ll \infty$

1)  $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$   $2\pi r \lambda L = \frac{q\lambda}{\epsilon_0}$   
 donc  $\boxed{\vec{E} = -\frac{\lambda}{\epsilon_0 r} \vec{u}_r}$

2°)  $\frac{\lambda q}{\epsilon_0}$  est en  $\frac{N \cdot m^2}{m}$  car  $N \cdot m$  car  $\frac{kg \cdot m^2}{s^2}$  donc  $\frac{\lambda q}{\epsilon_0 m}$  en  $\frac{m^2}{s^2}$   
 car  $\frac{q q}{\epsilon_0 r^2}$  en  $N$  donc  $\alpha$  en  $m \cdot s^{-1}$   
 $(\text{dim}(\alpha) = L^{-1} \cdot t)$

3°) Force centrale,  $\vec{F} = q\vec{E} = -\frac{q\lambda}{\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$   
 donc mouvement dans le plan défini par  $\vec{OP}(t=0)$   
 et  $\vec{v}(0)$

4) La seule force  $\vec{F}$ , est conservative.  $\vec{F}$  grad  $E_p$

donc  $-\frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r = -\frac{dE_p}{dr} \vec{u}_r$  car  $\frac{E_p}{\partial\theta} = 0$  et  $\frac{\partial E_p}{\partial z} = 0$

$E_p = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + c^k$  avec, par exemple  $c^k = 0$

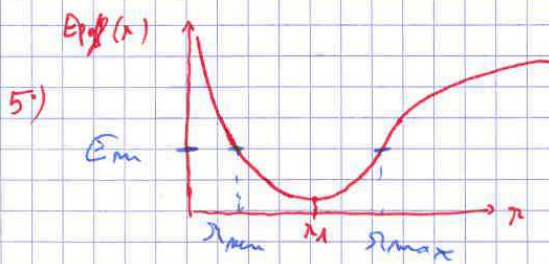
T.C.M.  $E_c + E_p = c^k = E_{cm}$  donc  $\frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) = E_{cm}$

car  $\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \left( \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{q\lambda}{2\pi} \ln(r) \right) = c^k = E_{cm}$

or, mv force centrale donc  $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0$  car  $\vec{L}_O = \vec{c}$

car  $r \vec{u}_r \wedge (m \dot{r} \vec{u}_r + m r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) = c$  car  $r \dot{\theta} r - c^k = r \dot{\theta} r_0 v_0$

d'où  $r \dot{\theta} = \frac{r_0}{r}$  puis  $\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \left( \frac{1}{2} m \frac{r_0^2 v_0^2}{r^2} + \frac{q\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln(r) \right) = c^k = E_{cm}$   
 $C_{eff}(r)$



$r > r_0$  et  $E_{cm} = E_{cm \text{ min}}$

Correspond à 1 [M.C.L.] avec  $r = 0 \forall t$

et  $r \dot{\theta} = v_0$  et  $[r_0 = r_1]$

et P.F.D.  $\frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{m v_0^2}{r^2} \frac{dr}{dt} \frac{dt}{dr}$   
 $(v = v_0 = \alpha - c^k)^{\beta-1}$

6)  $\forall$  dom.  $r \in [r_{min}, r_{max}]$   
 pour  $E_{cm}$  donne et  $E_{cm} = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_0)$

7°)  $\beta \neq 1$  donc  $v_0 > \alpha$

$$\text{moment de L'eff} \text{ verifie } \frac{1}{2} m \rho_0^2 v_0^2 \left( -\frac{1}{\alpha} \right) + \frac{q \lambda}{4\pi \epsilon_0} \alpha = 0$$

$$\text{d'où } \frac{m v_0^2 \rho_0}{\alpha} = \frac{q \lambda}{2\pi \epsilon_0} \quad \text{c'est } \frac{v_0^2 \rho_0}{\alpha} = \alpha$$

$$\text{c'est } \rho_A = \rho_0 \frac{v_0}{\alpha} \quad \text{c'est } \alpha = \rho_0 \beta$$

Si  $\beta > 1$ ,  $\rho_A > \rho_0$  et  $\alpha < 0$ ,  $\rho = 0$  dans  $E_{\text{min}} - E_{\text{eff}}(\rho_0)$

donc  $\rho_0 = \rho_{\text{min}}$  et  $\rho \in [\rho_{\text{min}}, \rho_{\text{max}}]$

8) Si  $\beta < 1$ ,  $\rho_A < \rho_0$  et  $\rho_0 = \rho_{\text{max}}$  et  $\rho \in [\rho_{\text{min}}, \rho_{\text{max}}]$



Puisque la céramique est isolante, on se ramène ici à une association en série de cinq résistances : les deux connecteurs, les deux capsules en nickel, et le cylindre creux en carbone. Compte tenu que le carbone est bien moins conducteur que le cuivre étamé ou le nickel, l'association en série des cinq résistances équivaut à l'unique résistance en carbone. On cherche donc la résistance électrique  $R$  d'un cylindre creux, de longueur  $L$ , de rayon intérieur  $R_1$ , et d'épaisseur  $e$ .

Attention, bien que la couche de carbone soit de forme cylindrique, on est ici en 1D, puisque le vecteur densité de courant ( $\vec{j}$ ) a la même direction, en tout point du carbone.

D'après le schéma, et puisque la résistance souhaitée est de valeur importante, on peut légitimement supposer que l'épaisseur  $e$  est très petite devant  $R_1$ . La section à travers laquelle circule le courant est donc  $S = 2\pi R_1 e$ , et en notant  $\gamma_C$  la conductivité du carbone,  $R = \frac{L}{2\pi R_1 e \gamma_C}$ , d'où l'épaisseur de la couche de carbone :  $e = \frac{L}{2\pi R R_1 \gamma_C}$ .

Les résistances utilisées en électronique ont des dimensions typiques de l'ordre de  $L = 10\text{mm}$  et  $R_1 = 1\text{mm}$ . On en déduit que pour une résistance  $R = 1.0\text{k}\Omega$ , l'épaisseur de la couche de carbone doit être environ  $e = 25\text{nm}$ .

C'est très faible. Ainsi, pour réaliser des résistances de grande valeur, on remplace la couche de carbone par un fil de carbone en spirale.

### ELMGN-8: Tachymètre de voiture (Eric SARTORI Enzo LOMAZZI CCINP 2019)

Le principe de fonctionnement du capteur est le suivant :

Comme le montrent les figures de l'énoncé, le champ magnétique entre les points A et B du noyau ferromagnétique est plus ou moins fort selon la position de la roue dentée.

Il est fort quand c'est une dent qui est en face de la bobine, et faible quand c'est un creux qui est en face de la bobine (et il prend toutes les valeurs intermédiaires à mesure qu'une dent s'éloigne et qu'un creux se rapproche).

En effet, plus le parcours des lignes de champ dans l'air est élevé (« entrefer » de grande longueur), plus le champ magnétique créé par l'aimant est faible.

Le flux du champ magnétique à travers la bobine est

$$\varphi(t) = \iint_{N \text{ spires}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Ce flux varie au fil du temps. Son allure est à peu près sinusoïdale, mais avec en plus une composante continue (car le champ magnétique reste toujours de même sens, en chaque point de la bobine).

La f.é.m. induite dans la bobine est  $e(t) = -\frac{d\varphi}{dt}(t)$ .

Et, si la f.é.m. est orientée vers le bas,  $u(t) = -e(t) = +\frac{d\varphi}{dt}(t)$ .

La composante continue qui était présente dans  $\varphi(t)$  disparaît du fait de la dérivation par rapport au temps :  $u(t)$  est de valeur moyenne nulle (cf théorème préliminaire vu dans le chapitre sur le hacheur).

Sa période correspond au temps qu'il faut pour qu'une dent soit remplacée par la suivante

La vitesse angulaire de la roue est donc :

$$\omega_{roue} = \frac{2\pi}{nT} \text{ avec } n = \text{nombre de dents et } T = \text{période de la courbe rouge de l'énoncé.}$$

Numériquement, on compte  $n = 30$  dents, et on trouve :

- Pour la première courbe,  $T_1 = 5,0\text{ms}$ , d'où  $\omega_{roue 1} = 42\text{rad.s}^{-1}$
- Pour la seconde courbe,  $T_2 = 1,7\text{ms}$ , d'où  $\omega_{roue 2} = 0,13 \cdot 10^3\text{rad.s}^{-1}$

### ELMGN-9: Mutuelles et constantes de temps (Eric SARTORI Mines 2019)

On adopte les notations de la figure ci-dessous.

Circuit 1 : la loi de la maille s'écrit  $e(t) = Ri(t) + L_1 \frac{di}{dt}$ , équation différentielle du premier ordre, de constante de temps  $\tau_1 = \frac{L_1}{R}$ .

Circuit 2 : idem circuit 1, mais avec une inductance globale  $L_1 + L_2$ .

Mutuelle inductance négligeable car circuits trop éloignés, donc  $\tau_2 = \frac{L_1 + L_2}{R}$ .

Pour les circuits 3 et 4, on a les lois caractéristiques (voir figure) :

$$u_2(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

$$\text{et } u_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

Circuit 3 : Loi de la maille :  $e(t) = Ri(t) + u_1(t) + u_2(t)$ , et  $i_1(t) = i_2(t) = i(t)$ ,

$$d'o\grave{u} e(t) = Ri(t) + L_1 \frac{di}{dt}(t) + M \frac{di}{dt}(t) + L_2 \frac{di}{dt}(t) + M \frac{di}{dt}(t),$$

$$\text{ou plus simplement, } e(t) = Ri(t) + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt}(t).$$

On a donc une \u00e9quation diff\u00e9rentielle du premier ordre, de constante de temps  $\tau_3 = \frac{L_1 + L_2 + 2M}{R}$ .

Circuit 4 : Loi de la maille :  $e(t) = Ri(t) + u_1(t) - u_2(t)$ , et  $i_1(t) = -i_2(t) = i(t)$ ,

$$d'o\grave{u} e(t) = Ri(t) + L_1 \frac{di}{dt}(t) - M \frac{di}{dt}(t) - \left( -L_2 \frac{di}{dt}(t) + M \frac{di}{dt}(t) \right),$$

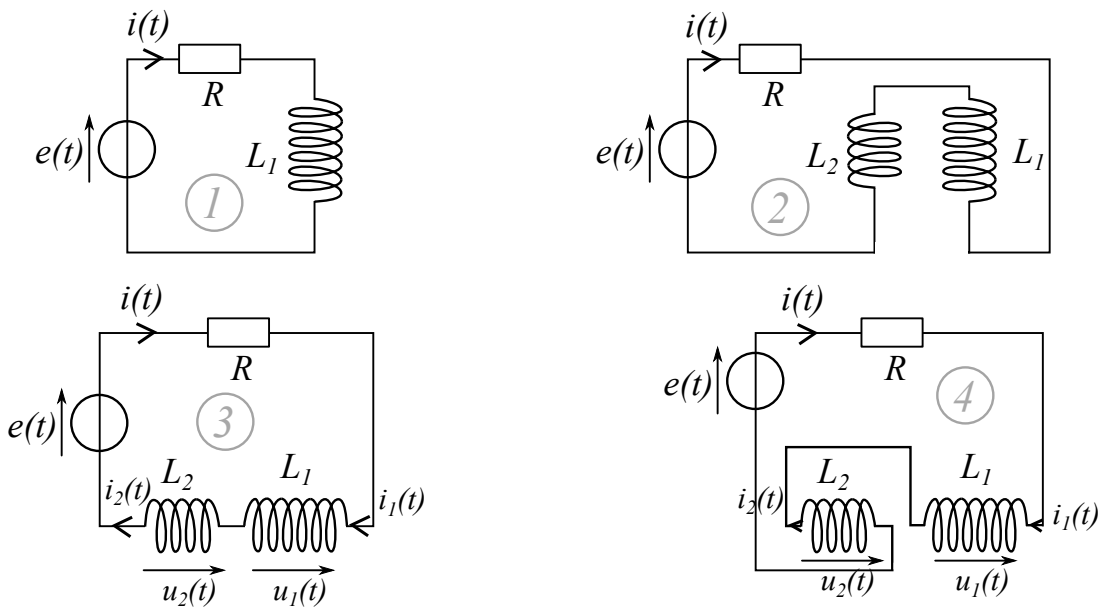
$$\text{ou plus simplement, } e(t) = Ri(t) + (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt}(t).$$

On a donc une \u00e9quation diff\u00e9rentielle du premier ordre, de constante de temps  $\tau_4 = \frac{L_1 + L_2 - 2M}{R}$ .

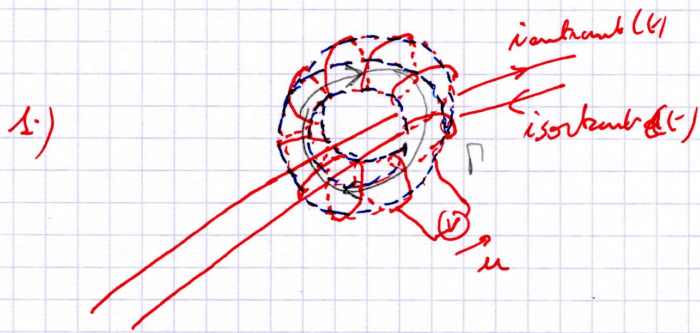
On voit que  $\tau_{u_2}$  est la valeur moyenne de  $\tau_{u_3}$  et  $\tau_{u_4}$ . Dans les valeurs num\u00e9riques propos\u00e9es, c'est le cas pour  $\tau_B$ , qui est la moyenne de  $\tau_A$  et  $\tau_C$ . Et  $\tau_D$ , plus petit, est donc  $\tau_1$ .

On en d\u00e9duit :

$$L_1 = 0,10 \text{ H}, L_2 = 0,060 \text{ H}, M = 0,010 \text{ H}.$$



**ELMGN-10: Disjoncteur diff\u00e9rentiel (inspir\u00e9 de CCP 2017 Alexandre BARBIER et Marie TUAUDEN, Mathilde BOIVIN CCP 2016)**



2.) Si pas de milieu ferromagnétique, et si  $N$  spires, et pour  $\Gamma$  de rayon  $r$ ,

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 N (i_{entrant} - i_{sortant})$$

$$\Rightarrow 2\pi r B(t) = \mu_0 N (i_{entrant} - i_{sortant})$$

Et si circuit à une branche sur 1 voltmètre,  $u = e = -\frac{d\phi}{dt}$

$$\text{et } \phi = N \int B(t) dz dr$$

$$i_{sortant} \neq i_{entrant} \Rightarrow B \neq 0 \Rightarrow e(t) \neq 0$$

ELMGN-11: Foudre et tension de pas (Thomas MIGOT et Caroline MARION CCP 2018)

\* Le courant traverse des deux sphères, de rayons  $r_1 \neq r_2$ . Symétrie  $\Rightarrow \vec{j} // \vec{u}_r$   
et  $j(r)$

\* Pendant le passage du courant)  $\frac{\partial}{\partial t} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} = 0$

$$\Rightarrow j(r) 2\pi r^2 = K = -I \Rightarrow j = \frac{-I}{2\pi r^2} \quad (\text{prenons } I \text{ entrant de fig 2})$$

\* Loi d'Ohm locale:  $\vec{j} = \gamma_s \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{-I}{2\pi \gamma_s r^2} \vec{u}_r \quad I > 0$   
 $j < 0$

$$* \vec{E} = -\operatorname{grad} V \Rightarrow -\frac{I}{2\pi \gamma_s r^2} = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V = -\frac{I}{2\pi \gamma_s r} + C'$$

$\Rightarrow V$  fonction  $\nearrow$  de  $r$ .

$$* \underbrace{V(r_2) - V(r_1)}_{\text{tension de pas}} = \frac{I}{2\pi \gamma_s} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{I}{2\pi \gamma_s} \left( \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right)$$

\* Soit  $I_h$  le courant dans le corps humain.

$$I_h = \frac{U}{R_h} = \frac{I}{2\pi \gamma_s R_h} \frac{(r_2 - r_1)}{r_1 r_2} \quad r_2 - r_1 = a$$

$$\text{Et si } r_2 - r_1 \ll r_1, \quad I_h \approx \frac{I a}{2\pi \gamma_s R_h D^2}$$

$$I_h \ll I_{\text{let}} \Rightarrow \frac{I a}{2\pi \gamma_s R_h D^2} < I_{\text{let}} \Rightarrow D > \sqrt{\frac{I a}{I_{\text{let}} 2\pi \gamma_s R_h}}$$

$$D_{\text{min}} = \sqrt{\frac{I a}{2\pi \gamma_s R_h I_{\text{let}}}} = \sqrt{\frac{15 \cdot 10^3 \times 0,8}{2\pi \times 1 \times 2500 \times 25 \cdot 10^3}}$$

$$D_{\text{min}} \approx 6 \text{ cm}$$

$$5,53$$

(mais CCP PSI 2015  $\Rightarrow \gamma_s = 10^2$  au lieu de 1)  
et valeur  $I = 50 \text{ mA}$   $\Rightarrow D_{\text{min}} = 0,11 \text{ km}$ )

Et valeurs  $\Rightarrow a$  + grand  $\Rightarrow I$  + grand  $\Rightarrow$  même  $R_{\text{ohm}}$ .

\* Vue la taille de l'antenne (qu'on peut estimer  
à  $\approx 15 \text{ cm}$ ). Et ceci est de l'ordre de grandeur

de  $\lambda_p$ . Prenons  $\lambda_p = 0,3 \text{ m} \Rightarrow f_p = \frac{c}{\lambda_p} = \frac{3 \cdot 10^8}{0,3} = 1 \text{ GHz}$

(porteur)

(on fait  $\approx 10^9 \text{ Hz}$ )

\* Il faut moduler car voix  $\Rightarrow f \in [20; 20 \cdot 10^3] \text{ Hz}$  et  
le son se propage mal à gde distance  $\Rightarrow$  onde électromagnétique  
mais pas n.c. Si on gardait n.c  $f$ , on aurait  $\lambda$   
énorme  $\Rightarrow$  on module, ce qui translate la fréquence  
à AM:  $f$  devient  $f_p + f$  et  $f_p - f$ .

\* Autonomie: 3 piles 1,5V, de capacité 2800 mAh. =  $Q$

$$\overset{\text{out}}{P} = 0,5 \text{ W} \Rightarrow \Delta t \approx \frac{Q}{I} = \frac{QU}{P_{\text{elec}}} = \frac{QU}{P_{\text{onde}}}$$

rendement

$$\eta = \frac{P_{\text{onde}}}{P_{\text{elec}}}$$

$$\Delta t = \frac{QU}{P_{\text{onde}}} = \frac{2,8 \times 1,5}{0,5} \eta$$

$$\Delta t < 9 \times 2,8 = 25,2 \text{ h}$$

$$\Delta t < \text{une 20aine d'heures}$$

\* En campagne,  $\vec{S} \approx \|\vec{E}\| \times \|\vec{H}\| R^2$  car  $\vec{E}$  qui peut être  
le sol est réfléchi mais néanmoins émis.

$$\text{et } \vec{H} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \text{ onde localement plane}$$

$$\Rightarrow B \approx \frac{E}{c} \Rightarrow \|\vec{H}\| \approx \frac{E_0}{c} E^2$$

$$\text{En campagne } \left\{ \begin{array}{l} \vec{S} = E_0 c E^2 (R) 4\pi R^2 \Rightarrow E(R) = \sqrt{\frac{\vec{S}}{4\pi R^2 c}} \times \frac{1}{R} \\ \Rightarrow \approx 5 \text{ km}, \quad \vec{E}(5 \text{ km}) = \sqrt{\frac{0,5 \times 9 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8}} \times \frac{1}{5000} \\ = \frac{\sqrt{15}}{5000} \text{ V/m} \end{array} \right.$$

Et on retrouve le

champ  $E$  en 1/r via d'Alembert + onde sphérique (cf chap OND sources)

### ELMGN-13: Câble Almelec (Alexandre RIPPLINGER, Thomas PERRIN CCP 2017)

Cet exercice porte sur l'effet de peau en électromagnétisme (chapitre OND5). En partant de l'équation de Maxwell-Faraday, et en faisant rot de rot, puis en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère (dans laquelle on néglige le courant de déplacement car à 50 Hz,

$\gamma \ll \epsilon_0 \omega$ ) et la loi d'Ohm locale, on obtient une équation type diffusion:  $\Delta \vec{j} = \gamma \mu_0 \frac{d\vec{j}}{dt}$ .

En cherchant une solution complexe harmonique, en  $\exp(i(\omega t - \underline{k}x))$ , on obtient la relation de dispersion:  $(\underline{k})^2 = -i\mu_0 \gamma \omega$ , d'où

$$\underline{k} = \pm \frac{1-i}{\delta}, \text{ avec } \delta = \frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}.$$

Numériquement, on trouve  $\delta = 1,3 \text{ cm}$ .

Sur la photo, vu que le diamètre global est de 80 mm, on en déduit que chaque brin a un diamètre de l'ordre de 1 cm, ce qui est cohérent, car comparable à l'épaisseur de peau, donc le courant va occuper tout le volume. Si l'épaisseur de peau avait été nettement inférieure au diamètre d'un brin, le courant se serait concentré dans la peau du brin.

ELMGN-14: Pince Ampèremétrique (Olivier NACHIN Mines 2018)

EMG 19-1 Pince Ampèremétrique Mines Ponts 2018 Olivier NACHIN et Centrale TSI 2016

1.)  $(M, \vec{u}_1, \vec{u}_3) = \text{Tsym}$  pour la distribution de courants

$\Rightarrow \vec{B}(M) \perp$  le plan donc  $\vec{B}(M) \parallel \vec{u}_3$

$\Rightarrow \vec{B}(M) = B(r, \theta, z) \vec{u}_3$

De plus, la distribution de courant est invariante par toute rotation autour de  $(Oz)$  donc  $B(r, \theta, z) = B(r, z)$

A l'intérieur du tore :  $T^{\text{th}}$  Ampère sur 1 cercle d'axe  $(Oz)$ , sens direct.

$2\pi r \vec{B}(r, z, t) = \mu_0 \left( \sum_{\text{bobine}} Ni \right) \Rightarrow \vec{B}_{\text{bobine}} = \frac{\mu_0 Ni(t)}{2\pi r} \vec{u}_3$

2.) De  $\vec{u}_1$ ,  $2\pi r \vec{B}(r, z, t) = \mu_0 I(t) \Rightarrow \vec{B}_{\text{fil}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_3$

3.)  $M = \frac{\Phi_{1 \rightarrow 2}}{I_1} = \frac{\Phi_{2 \rightarrow 1}}{I_2}$        $L = \frac{\Phi_{1 \rightarrow 1}}{I_1}$

Calcul non demandé :  $\Phi_{\text{fil} \rightarrow \text{bobine}} = N \int_a^{R+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I N a \ln(R+a)}{\pi(R-a)}$

$\Rightarrow M = \frac{\mu_0 N a \ln(R+a)}{\pi}$  ok

$\Phi_{\text{bobine} \rightarrow \text{bobine}} = N \int_a^{R+a} \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 i N^2 a \ln(R+a)}{\pi}$  ok

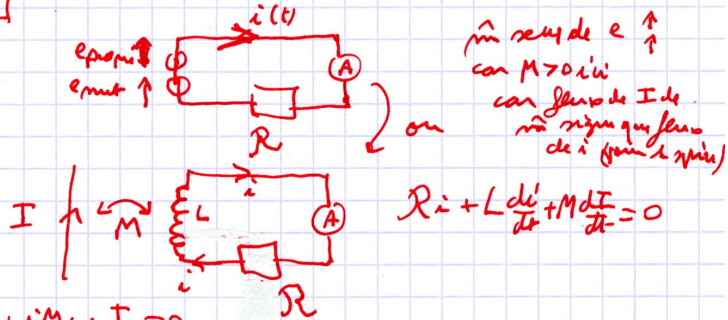
Commentaires : • si  $a \ll R$ ,  $\ln(1+a/R) - \ln(1-a/R) \approx \frac{a}{R} - (-\frac{a}{R}) = \frac{2a}{R}$

$\Rightarrow L \approx \frac{\mu_0 N^2 a^2}{\pi R} = \frac{\mu_0 N^2 (2a)^2}{2\pi R} = \mu_0 \frac{d^2 S}{l}$  cf solénoïde  $\infty$ .

- L en  $N^2$  car Bobine en  $N$  et on fait le flux à travers  $N$  spires
- M en  $N$  car Bfil sans  $N$  et flux à travers  $N$  spires.
- $L = NM$

4.) Schéma équivalent :

$e_{\text{prop}} = L \frac{di}{dt}$   
 $e_{\text{mut}} = -M \frac{dI}{dt}$



$\hat{m}$  sens de  $e \uparrow$   
 car  $M > 0$  i.e.  
 car flux de  $I$  de  
 $\hat{m}$  sens que flux  
 de  $i$  (sens  $\hat{m}$  spires)

$Ri + L \frac{di}{dt} + M \frac{dI}{dt} = 0$

$\Rightarrow (R + j\omega L) \underline{i} + jM\omega \underline{I} = 0$

$\Rightarrow \underline{i} = \frac{-jM\omega}{R + j\omega L} \underline{I} = \frac{-jM\omega}{R + j\omega L} I_0 e^{j\omega t}$

5.) En "haute fréquence", car pour  $\omega \gg \frac{R}{L}$ ,  $\underline{i} \approx -\frac{M}{L} I_0 e^{j\omega t} = -\frac{1}{N} I_0 e^{j\omega t}$

et  $\left| \frac{\underline{i}}{\underline{I}} \right| \approx \frac{1}{N} \Rightarrow$  "transf de courant"  
 et  $N = \omega L \Rightarrow |i| \ll |I|$

1°) L'ensemble est neutre donc : $\rho_1 L_1 + \rho_2 L_2 = 0$			
2°) Maxwell-Gauss : $div \vec{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon} \Rightarrow \frac{dE}{dx} = \frac{\rho_c}{\epsilon}$			
En intégrant dans les différentes zones et en écrivant la continuité de $E$ (pas de charges surfaciques), on arrive à :			
$x < -L_1$ $E = 0$	$0 > x > -L_1$ $E = \frac{\rho_1}{\epsilon}(x + L_1)$	$0 < x < L_2$ $E = \frac{\rho_2}{\epsilon}(x - L_2)$	$x > L_2$ $E = 0$
Représentation graphique :			
3°) On a $\vec{E} = E(x)\vec{e}_x = -\vec{grad}V = -\frac{dV}{dx}\vec{e}_x$ .			
On nous impose $V(x=0) = 0$			
En intégrant dans les différentes zones et en écrivant la continuité du potentiel $V$ , on arrive à :			
$x < -L_1$ $V = \frac{\rho_1}{2\epsilon} L_1^2$	$0 > x > -L_1$ $V = -\frac{\rho_1}{\epsilon} \left( \frac{x^2}{2} + L_1 x \right)$	$0 < x < L_2$ $V = -\frac{\rho_2}{\epsilon} \left( \frac{x^2}{2} - L_2 x \right)$	$x > L_2$ $V = \frac{\rho_2}{2\epsilon} L_2^2$
Représentation graphique :			
4°) $V_0 = \frac{\rho_2 L_2^2}{2\epsilon} - \frac{\rho_1 L_1^2}{2\epsilon}$			

ELMGN-16: Ligne haute tension en régime continu (inspiré de Centrale 2017, Jérémy ROBERT)

- $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_x$  et  $V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln(r) + K$ .
- $V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$ , avec  $r_2^2 = \frac{D^2}{4} + r^2 + Dr \cos\theta$ , et  $r_1^2 = \frac{D^2}{4} + r^2 - Dr \cos\theta$ . Avec des développements limités,  $r_2 \approx r \left(1 + \frac{D}{2r} \cos\theta\right)$  et  $r_1 \approx r \left(1 - \frac{D}{2r} \cos\theta\right)$ . On retombe bien sur  $V(r, \theta) = \frac{\lambda D \cos(\theta)}{2\pi r \epsilon_0}$ .

3. En dehors des deux fils chargés, il n'y a pas de charges, donc le champ électrique est à flux conservatif. En conséquence, la norme du champ électrique diminue quand les lignes de champ s'éloignent les unes des autres. De même, les surfaces équipotentielles

s'éloignent les unes des autres quand la norme du champ diminue, puisque  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ . On peut aussi remarquer que les lignes de champ coupent orthogonalement les surfaces équipotentielles. En effet,  $dV = \text{grad } V \cdot d\vec{\ell} = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ . Et sur une surface équipotentielle,  $dV = 0$ . On voit également que le plan  $(yOz)$  est plan d'antisymétrie pour la distribution de charges donc aussi pour le champ électrique. Et le plan  $(xOz)$  est plan de symétrie pour les charges et pour le champ électrique.

### ELMGN-17: Plaque à induction (Geoffrey HADZI CCP 2016)

1. La source électrique qui alimente la bobine apporte de l'énergie à celle-ci; la bobine crée un champ magnétique variable; il apparaît alors des courants induits dans la fond de la casserole (courants de Foucault), ce qui la fait chauffer; elle transmet ensuite l'énergie thermique à l'eau qu'elle contient, par conduction et convection naturelle.

2. Les lignes de champ magnétique sortent de la bobine de façon verticale. Le champ magnétique étant à flux conservatif (Maxwell-Thomson), il a même valeur dans le disque délimité par la bobine et dans le fond de la casserole. On peut aussi utiliser l'argument de la continuité de la composante normale du champ magnétique à l'interface air-métal.

3. Le plan  $(xOz)$  est plan de symétrie pour la distribution de  $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , donc d'antisymétrie pour le champ électrique induit. En un point  $M$  de ce plan,  $\vec{E}(M, t)$  est donc orthogonal à ce plan, c'est-à-dire porté par  $\vec{e}_\theta$  des coordonnées cylindriques. De plus la distribution  $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  est invariante par toute rotation autour de  $(Oz)$ , donc finalement,  $\vec{E} = E(r, z, t) \vec{e}_\theta$ .

Equation de Maxwell-Faraday :  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  donne, en utilisant le formulaire donnant les expressions des opérateurs de dérivation spatiale en coordonnées cylindriques :  $-\frac{\partial E}{\partial z} = 0; 0 = 0$ ; et  $\frac{1}{r} \frac{\partial rE}{\partial r} = B_0 2\pi f \sin(2\pi f t)$ . La première donne  $E = E(r, t)$ , puis la dernière :  $\frac{\partial rE}{\partial r} = B_0 r 2\pi f \sin(2\pi f t)$ , puis  $rE = B_0 r^2 \pi f \sin(2\pi f t) + K_1$ , d'où  $E = B_0 r \pi f \sin(2\pi f t) + \frac{K_1}{r}$ . Puisque cette expression doit être vraie même pour  $r = 0$ , on a  $K_1 = 0$ , d'où  $E(r, t) = B_0 r \pi f \sin(2\pi f t)$ .

On retrouve ce résultat avec une méthode intégrale (celle qui avait été exigée au concours) : le théorème de Stokes appliqué à un contour circulaire de rayon  $r$ , d'axe  $(Oz)$  donne  $2\pi r E = B_0 \pi r^2 2\pi f \sin(2\pi f t)$ .

4. Puissance instantanée transmise par induction à la casserole :

$\mathcal{P}(t) = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R \gamma B_0^2 r^2 \pi^2 f^2 \sin^2(2\pi f t) r dr d\theta dz = \int_0^R 2\pi h \gamma B_0^2 r^3 \pi^2 f^2 \sin^2(2\pi f t) dr = h \gamma B_0^2 \frac{R^4}{2} \pi^3 f^2 \sin^2(2\pi f t)$ . La puissance moyenne est  $\langle \mathcal{P}(t) \rangle = h \gamma B_0^2 \frac{R^4}{4} \pi^3 f^2$ , soit  $\frac{\pi h \gamma B_0^2 S^2 f^2}{4}$ , de valeur numérique 1,3 kW.

5. On utilise un milieu ferromagnétique pour la casserole car c'est l'excitation magnétique  $\vec{H}$  qui est imposée par les courants de la bobine; et  $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ , donc le champ magnétique est renforcé par l'utilisation de matériau ferromagnétique ( $\mu_r$  élevé).

6.  $\Delta t = \frac{\mu_{eau} V c (T_f - T_i)}{\langle \mathcal{P} \rangle} = 8$  minutes, si on ne tient pas compte des fuites thermiques; donc en pratique, il faut plus longtemps.

### ELMGN-18: Géologie : mesure de la résistivité d'un sol (André PEDROSA Centrale 2015), avec préparation

16 ELMG3: Géologie : mesure de la résistivité d'un sol.

1°) Sol - sol homogène  $\Rightarrow \vec{j}$  part de A de façon radiale, en prenant les coordonnées sphériques centrées en A :

$$\vec{j}_A = \frac{I}{2\pi r_A^2} \vec{u}_{rA} \quad \text{et} \quad \vec{j}_A = \frac{1}{\rho_1} \vec{E}_A \Rightarrow \vec{E}_A = \frac{\rho_1 I}{2\pi r_A^2} \vec{u}_{rA}$$

$$\vec{E}_A = -\text{grad } V_A \Rightarrow \frac{\rho_1 I}{2\pi r_A^2} = -\frac{dV_A}{dr_A} \Rightarrow V_A = \frac{\rho_1 I}{2\pi r_A} + \underbrace{K_A}_{=0}$$

$$2°) U_A = V_A(M) - V_A(N) = \frac{\rho_1 I}{2\pi} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{2d} \right)$$

$$\Rightarrow U_A = \frac{\rho_1 I}{4\pi d}$$

$$3°) \vec{j}_B = -\frac{I}{2\pi r_B^2} \vec{u}_{rB} \quad \vec{E}_B = \frac{-\rho_1 I}{2\pi r_B^2} \vec{u}_{rB}$$

$$V_B = -\frac{\rho_1 I}{2\pi r_B} + K_B \quad U_B = V_B(M) - V_B(N) = \frac{-\rho_1 I}{2\pi} \left( \frac{1}{2d} - \frac{1}{d} \right)$$

$$\Rightarrow U_B = \frac{\rho_1 I}{4\pi d}$$

4°) On utilise le théorème de superposition :

$$U = U_A + U_B \Rightarrow U = \frac{\rho_1 I}{2\pi d}$$

5°) OK : dans ce cas,  $\rho_{app} = 2\pi d \frac{U}{I} = \rho_1$ .

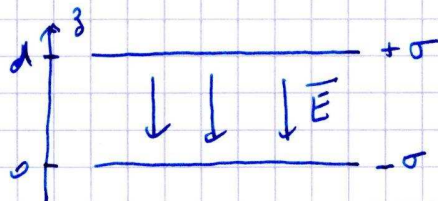
6°)

Pour  $e \geq 2d$ ,  $\vec{j}_A$  et  $\vec{j}_B$  sont bien radiaux car les deux axes centrés sur A et B sont entièrement dans le domaine de résistivité  $\rho_1$ . Mais pour  $2d > e$ , les lignes de courant se déforment (pour éviter le vestige rocheux)

$\Rightarrow$  on peut estimer ~~le~~  $e \approx 2 \times 20 = 40 \text{ m}$

car la courbe  $\rho_{app}(d)$  se déforme pour  $d > 20 \text{ m}$ .

1)  $80 \text{ km} \ll 6400 \text{ km} \Rightarrow$  les 2 surfaces sphériques en regard, qui constituent les 2 armatures d'un condensateur, sont  $\approx$  de même surface  $\rightarrow$  pb de P.

2) Plaque  $Oz \perp$  plans.  Symétrie et invariance  $\Downarrow$   $\vec{E} = E(z) \vec{u}_z$  charges + en d  $\Rightarrow \vec{E}$  selon  $-\vec{u}_z$ .

3)  $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_y - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_y = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_y$  Gauss puis Thé de superposition  $\Rightarrow$  A.N.  $\|\vec{E}\| = 0,10 \text{ kV.m}^{-1}$

4)  $\vec{E} = -\frac{dV}{dz} \vec{u}_z \Rightarrow V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} z + C$   
 $\Rightarrow$  pour une hauteur  $h$ , on aurait  $\Delta V = \frac{\sigma h}{\epsilon_0} = 0,18 \text{ kV}$

5)  $I = \frac{\Delta V}{R} = 0,18 \text{ A}$  (180 mA)  $\Rightarrow$  mort!

6) Mais les surfaces équipotentielles sont déformées par la présence d'un homme, bien plus conducteur que l'air.

Dit autrement, le calcul de  $\vec{E}$  a supposé qu'il n'y avait que de l'air entre les 2 plaques, ce qui n'est plus vrai en présence d'un homme.