

Physique des ondes

OND-1: Ondes acoustiques (CCINP 2025 Keenan GALLART et Rania EL MALKI) Fait en classe.

OND-2: Cornet acoustique (CCINP 2025 Nils BOURGEOIS) Fait en classe.

OND-3: Durée d'un Blackout (CCINP 2025 Swan AMRANI, Mathilde PALLET et Joseph MOUROUX) Fait en classe.

OND-4: Ondes acoustiques (CCINP 2024 Jeanne DORR) Fait en classe

OND-5: Laser (CCINP 2023 Mathéo GIRARDET, Mathis BEGUET)

Voir cours : $\mathcal{P} = \frac{\epsilon_0 c E_m^2 \pi d^2}{2} \frac{\pi d^2}{4}$, d'où $E_m = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{8\mathcal{P}}{\epsilon_0 c \pi}} = 0.98 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$. Puis $B_m = \frac{E_m}{c} = 3.3 \mu\text{T}$.

OND-6: Onde électromagnétique et énergie (CCINP 2023 Adalbert LUTZ)

1. Cette onde se propage parallèlement à l'axe (Oz), dans le sens des z croissants.
2. Elle est polarisée rectilignement, parallèlement à l'axe (Ox).
3. Son champ magnétique est $\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{E_m}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y$. En effet, l'équation de Maxwell-Faraday s'écrit $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, d'où en notation complexe, $-jk \vec{e}_z \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B}$, puis $\vec{B} = \frac{k}{\omega} \vec{e}_z \wedge E_m \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$.
4. La densité volumique d'énergie électromagnétique est $u_{em} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$.
5. Le vecteur de Poynting représente le vecteur densité de flux de puissance électromagnétique rayonnée. Sa direction et son sens correspondent à ceux de la propagation de l'énergie électromagnétique. Sa norme donne l'énergie qui passe par seconde et par mètre carré de section droite, ce qui donne sa dimension (l'unité est le watt par mètre carré).
Vérification : $\frac{B}{\mu_0}$ est en $\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$, donc la norme du vecteur de Poynting est en $\text{V} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{A} \cdot \text{m}^{-1}$. Et les $\text{V} \cdot \text{A}$ correspondent à des W .
6. Avec le formulaire, on retrouve (cf cours) : $\text{div} \vec{\pi} + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} = 0$.

OND-7: Corde vibrante verticale

1. On isole la partie de la corde entre z et L , d'où $T = \mu g(L - z)$.
2. En isolant une tranche dz , on obtient, avec la même démarche que dans le cours, $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = g(L - z) \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - g \frac{\partial \xi}{\partial z}$.
3. Pour $z \ll L$, $\omega^2 = k^2 gL - jkg$; $k' = \sqrt{\frac{\omega^2}{gL} - \frac{1}{4L^2}}$ et $k'' = \frac{1}{2L}$. Il existe une fréquence de coupure.

OND-8: Tuyau d'orgue (Elie POCHARD CCINP 2022) Problème peu guidé

1. $f_1 = 86 \text{ Hz}$. Premier harmonique suivant : $f_3 = 257 \text{ Hz}$.
2. $t_1 = 0.18 \text{ K}$ car $t_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T_0 p_1}{P_0}$ et $p_1 = \mu_0 c \omega_1 \xi_1$.

OND-9: Bruit d'avion (LSL CCP 2018) Problème ouvert

Le niveau sonore N_1 à $d = 10$ mètres d'un avion donne la puissance sonore totale émise par l'avion.

En effet $N_1 = 10 \log \left(\frac{I_1}{I_0} \right)$, où I_0 est l'intensité sonore correspondant au seuil d'audition, et I_1 l'intensité sonore à 10 m de l'avion.

Or I_1 est la moyenne temporelle de la puissance surfacique à la distance d de l'avion.

Ainsi, en supposant que la puissance sonore émise par l'avion soit émise de façon isotrope, la puissance P_0 sonore totale émise par l'avion se répartit uniformément sur la sphère de rayon d , soit $P_0 = I_1 4\pi d^2$.

L'avion n'est pas entendu à la distance D si le niveau sonore N_2 qu'il émet à une distance D est inférieur ou égal à 30 dB.

Avec $N_2 = 10 \log \left(\frac{I_2}{I_0} \right)$, et $I_2 = \frac{P_0}{4\pi D^2} = I_1 \frac{d^2}{D^2}$, on relie le niveau $N_2 = 10 \log \left(\frac{I_1 d^2}{I_0 D^2} \right)$ directement au niveau N_1 par la relation :

$$N_2 = N_1 + 20 \log \left(\frac{d}{D} \right).$$

D'où $D = d \times 10^{\frac{N_1 - N_2}{20}}$, numériquement $D = 10 \text{ km}$.

On peut remarquer que cette distance $D = 10 \text{ km}$ correspond à l'altitude des vols long courrier que l'on voit passer dans le ciel sans les entendre.

OND-10: Corde métallique et champ magnétique (LSL Mines-Ponts 2019)



on isole une tranche de corde entre x et $x+dx$

$$\mu dx \frac{\partial^2 \vec{u}_y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x+dx, t) \vec{u}_y - T_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x, t) \vec{u}_y + I dx B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_y \Rightarrow \mu \frac{\partial^2 \vec{u}_y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 \vec{u}_y}{\partial x^2} + I B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \vec{u}_y$$

$$\left\{ \frac{\partial^2 \vec{u}_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{u}_y}{\partial t^2} = -\frac{I B_0}{T_0} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \vec{u}_y \right\} \quad c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

2.) on suppose :

$$-Z_m \left(\frac{\pi x}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x}{L} + \varphi\right) \cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{c^2} \omega^2 Z_m \sin\left(\frac{\pi x}{L} + \varphi\right) \cos(\omega t + \varphi) =$$

$$- \frac{I_0 \cos(\omega t)}{T_0} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$\left(\frac{\pi^2}{L^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) Z_m \sin\left(\frac{\pi x}{L} + \varphi\right) \cos(\omega t + \varphi) = \frac{I_0}{T_0} \cos(\omega t) B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$\forall x \forall t \Rightarrow \varphi \equiv 0 \text{ ou } \pi$$

$$\forall x \forall x \in [0, L] \Rightarrow \varphi \equiv 0 \text{ ou } \pi \quad (\text{de toute façon, obligation car corde fixée en } x=L)$$

Pour $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$, $Z_m = \frac{I_0 B_0}{\left(\frac{\pi^2}{L^2} - \frac{\omega^2}{c^2}\right) T_0}$, ~~ce qui~~ lequel fait que Z_m peut être ≤ 0 , ce qui n'est pas grave, l'amplitude étant absolue $|Z_m|$. Sinon, on peut décaler φ ou ψ de π pour garder $Z_m > 0$

3.) \exists ~~une~~ ¹ résonance pour $\omega = \frac{\pi c}{L}$

, on est ici en régime force sinusoidal, comme le corde de Melde.

. Mais il existe la seule ~~résonance~~ résonance. Si on veut au voisin d'un fix, il faut prendre $\vec{B} = B_0 \sin\left(\varphi \frac{\pi x}{L}\right)$

OND-11: Axone (ligne bifilaire), dispersion et absorption (Jules MARTI Mines Ponts 2017)

$$1. \frac{\partial i}{\partial x} = -g_m u - C_m \frac{\partial u}{\partial t} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x} = -r_a i.$$

En combinant les deux, on obtient : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r_a C_m \frac{\partial u}{\partial t} + r_a g_m u.$

2. On peut se ramener à la forme proposée si $C_m \omega \gg g_m$. Cela correspond au domaine des hautes fréquences.

3. C'est une équation type diffusion. On retrouve cela dans la diffusion thermique, la diffusion de particules, l'effet de peau électromagnétique.

$$4. (\underline{k})^2 = -j\omega r_a C_m. \text{ Donc } \underline{k} = \pm \frac{1-j}{\delta}, \text{ avec } \delta = \frac{2}{r_a C_m \omega}. \text{ Pour les ondes se propageant selon } x \text{ croissant, on prend } \underline{k} = + \frac{1-j}{\delta}.$$

La vitesse de phase est $v_\phi = \omega\delta = \sqrt{\frac{2\omega}{r_a C_m}}$. Elle dépend de la pulsation, donc le milieu est dispersif.

Il est absorbant car la partie imaginaire de \underline{k} est non nulle, et elle est négative.

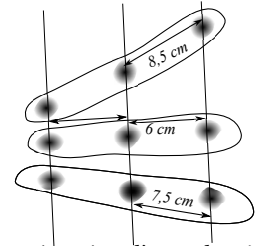
La vitesse de groupe est $v_g = 2\sqrt{\frac{2\omega}{r_a C_m}}$.

OND-12: Son émis par un hélicoptère en vol stationnaire (LSL CCINP 2019)

A venir ...

OND-13: Bananes dans un four à micro-ondes (William BONGUET CCP 2017), pb ouvert

Un four à micro-ondes est une cavité résonante. Les fréquences de résonance correspondent à ses modes propres. Les parois métalliques sont de nœuds pour le champ électrique. Les micro-ondes excitent les molécules d'eau présentes dans les aliments. C'est donc au niveau des ventres de champ électrique que l'échauffement est le plus important et que les peaux de banane noircissent le plus.



Sur la figure ci-dessous, les traits représentent les lignes de ventres de champ électrique. Elles sont séparées d'une demie longueur d'onde. On peut donc estimer que $\frac{\lambda}{2} = 6.0 \text{ cm}$.

Attendu que les micro-ondes sont des ondes électromagnétiques, dont la célérité dans l'air est proche de celle, c , de la lumière dans le vide $\lambda = \frac{c}{f}$. Il vient $f = \frac{3.0 \times 10^8}{0.12} = 2.5 \text{ GHz}$.

OND-14: Ligne bifilaire (Manon Sudre et Nicolas ARBEZ CCP 2016), pb ouvert

1. Il s'agit ici du problème classique d'un condensateur cylindrique (donc pb 2D). On cherche le champ électrostatique entre les deux armatures, via le théorème de Gauss, puis le potentiel électrostatique, puis enfin la capacité linéique : $\Gamma = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = 0.78 \times 10^{-10} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

$10^{-10} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

2. Au moyen du dessin, on détermine la célérité des ondes, compte tenu du temps pour faire l'aller-retour, puis l'inductance linéique : $\Lambda = \frac{1}{c^2\Gamma} = 0.20 \mu\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$.

3. $Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} = 50 \Omega$.

OND-15: Corde de Melde et verre d'eau (Alexis GIRARDEAU CCP 2015), problème ouvert

On note R le rayon de la sphère que l'on cherche à déterminer, et L la longueur de la corde entre le vibreur et le point de contact avec la poulie. Comme le dit l'énoncé, cette dernière est la même lors des deux expériences.

Lorsque l'expérience est réalisée sans le béccher, c'est-à-dire avec la masse sphérique entourée d'air, la norme T_1 de la tension de la corde peut se déterminer en isolant la sphère et en lui appliquant le théorème de la résultante dynamique : en appelant (Oz) l'axe vertical ascendant, $-mg\vec{e}_z + T_1\vec{e}_z = \vec{0}$. En effet, la sphère est quasiment immobile, et la poussée d'Archimède due à l'air est *a priori* négligeable, puisque cet objet qui sert à tendre la corde est volontairement choisi de forte densité.

Il vient $T_1 = mg$.

En présence d'eau, la poussée d'Archimède n'est plus négligeable (elle est environ multipliée par mille quand on remplace l'air par l'eau. Le théorème de la résultante dynamique donne alors, en notant T_2 la nouvelle tension de la corde : $-mg\vec{e}_z + T_2\vec{e}_z + \mu_{eau}\frac{4}{3}\pi R^3 g\vec{e}_z = \vec{0}$.

Il a été vu en cours que lorsque l'on réalise l'expérience de la corde de Melde, on obtient des résonances pour les modes propres, qui obéissent à l'équation $L = p\frac{\lambda}{2}$, λ étant la longueur d'onde, et p un entier naturel non nul, correspondant au nombre de fuseaux observables le long de la corde.

On rappelle le lien entre la longueur d'onde, la célérité, et la fréquence : $\lambda = \frac{c}{f}$. Et lors de la mise en équation des petits mouvements transversaux d'une corde de masse linéique μ , il a été établi que $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$.

Pour l'expérience dans l'air, on a $p_1 = 2$ et $L = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{T_1}{\mu}} = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{mg}{\mu}}$.

Pour l'expérience dans l'eau, on a $p_2 = 4$ et $L = \frac{2}{f}\sqrt{\frac{T_2}{\mu}} = \frac{2}{f}\sqrt{\frac{mg - \mu_{eau}\frac{4}{3}\pi R^3 g}{\mu}}$.

En divisant cette dernière équation par la précédente, on obtient : $1 = 2\sqrt{1 - \mu_{eau}\frac{4}{3m}\pi R^3}$, puis $R = \sqrt[3]{\frac{9m}{16\pi\mu_{eau}}}$. L'application numérique donne $R = 7.1 \text{ cm}$.

OND-16: Profondeur d'un puits (Romain MARPAUX CCP 2015), problème ouvert

1. Dans la première expérience, le puits se comporte comme un tuyau sonore, bouché d'un côté et ouvert de l'autre. Le fond du puits constitue un nœud de vitesse (donc un ventre de surpression), et l'entrée un nœud de surpression donc un ventre de vitesse. Les deux conditions aux limites sont par conséquent différentes. Les modes propres sont donc ceux pour lesquels la profondeur L du puits correspond à un nombre entier de fuseaux plus un demi-fuseau : $L = \left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}$, p étant un entier naturel éventuellement nul, et λ étant la longueur d'onde des ondes sonores.

Le protocole est donc le suivant : on place le haut-parleur à l'entrée du puits. À l'aide du générateur basse fréquence, on lui envoie une tension sinusoïdale pure de fréquence f . On place également le microphone à l'entrée du puits, et on le relie à la voie 1 de l'oscilloscope. On fait alors lentement varier la fréquence de la sinusoïde et on observe sur l'oscilloscope la sinusoïde délivrée par le microphone. Lorsque f correspond à un mode propre, il y a résonance et l'amplitude de cette sinusoïde passe par un maximum. On relève les différentes fréquences de résonance.

2. Notons L_1 la première valeur de L que l'on va déterminer à l'aide de cette première méthode. D'après la question précédente, il existe un entier p tel que, pour la première des deux fréquences, que l'on désignera par f_p , $L_1 = \left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{c}{2f_p}$. Et puisque la seconde fréquence correspond au mode propre suivant, la seconde fréquence est f_{p+1} , avec $L_1 = \left(p + 1 + \frac{1}{2}\right) \frac{c}{2f_{p+1}}$. De ces deux équations, on peut tirer des expressions des deux fréquences :

$f_p = \frac{c}{2L_1} \left(p + \frac{1}{2}\right)$ et $f_{p+1} = \frac{c}{2L_1} \left(p + 1 + \frac{1}{2}\right)$. Par différence, il vient : $f_{p+1} - f_p = \frac{c}{2L_1}$ puis $L_1 = \frac{c}{2(f_{p+1} - f_p)}$. En prenant pour la célérité du son dans l'air $c = 0.34 \text{ km s}^{-1}$, on obtient $L_1 = 34 \text{ m}$.

3. Pour étudier le mouvement de chute du caillou de masse m , il est raisonnable de négliger la poussée d'Archimède et les frottements de l'air. En assimilant le caillou à un point matériel et en lui appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, on peut écrire, après projection sur l'axe Oz vertical descendant : $m \frac{d^2 z}{dt^2} = mg$. On pose

$z = 0$ à l'entrée du puits. Les conditions initiales sont $z(0) = 0$ et $\frac{dz}{dt}(0) = 0$. Après deux intégrations, on obtient $z(t) = \frac{1}{2} g t^2$. En

notant L_2 la nouvelle valeur estimée de la profondeur du puits, la durée de la chute est $t_c = \sqrt{\frac{2L_2}{g}}$. Le bruit du choc du caillou contre le fond du puits met un peu de temps à arriver jusqu'aux oreilles de l'observateur qui se trouve près de l'entrée du puits. Notons t_s la durée de propagation du son. Compte tenu du résultat obtenu à la question précédente, on peut estimer que t_s est

de l'ordre de 0.1 s , ce qui représente environ 4% de la durée $\Delta t = 2.7 \text{ s}$. Si on veut en tenir compte, il faut écrire $\Delta t = \frac{L_2}{c} + \sqrt{\frac{2L_2}{g}}$.

Posons $x = \sqrt{L_2}$. x est solution de l'équation du second degré $x^2 + c \sqrt{\frac{2}{g}} x - c \Delta t = 0$. Seule une des deux solutions est positive et vaut

$$x = \frac{1}{2} \left(-c \sqrt{\frac{2}{g}} + \sqrt{\frac{2c^2}{g} + 4c \Delta t} \right). \text{ D'où } L_2 = \frac{1}{4} \left(-c \sqrt{\frac{2}{g}} + \sqrt{\frac{2c^2}{g} + 4c \Delta t} \right)^2. \text{ Numériquement, } L_2 = 36 \text{ m}.$$

On note que cette valeur est du même ordre de grandeur que la précédente. Le fait qu'elle lui soit supérieure n'est pas étonnant : on a négligé les frottements de l'air, donc surestimé la vitesse du caillou et la distance qu'il parcourt.

4. Cette dernière expérience est la manifestation de l'effet Doppler, dans un contexte ici relativement simple : l'émetteur est en mouvement de translation rectiligne et le récepteur est fixe. Notons v_f la vitesse du téléphone juste avant son entrée en contact avec le fond du puits.

Pour retrouver simplement l'équation relative à l'effet Doppler dans ce contexte, on peut tenir le raisonnement suivant : supposons qu'un joueur de tennis soit debout sur un chariot qui s'éloigne de l'observateur à la vitesse v . Le joueur frappe régulièrement une balle en direction de l'observateur, avec une période T . La balle s'éloigne de lui à la vitesse c par rapport au chariot. Supposons qu'à $t = 0$, le tennisman soit à une distance d de l'observateur. Si les balles sont frappées aux instants $0, T, 2T, 3T, \dots$, l'observateur les reçoit à $\frac{d}{c-v}, T + \frac{d+vT}{c-v}, 2T + \frac{d+2vT}{c-v}, \dots$

La période que perçoit l'observateur n'est donc pas T mais $T + \frac{vT}{c-v}$, soit $T \left(1 + \frac{v}{c-v}\right)$, ou encore $\frac{c}{c-v} T$. Si f est la fréquence d'émission, la réception se fait avec une fréquence apparente $f_{app} = f \left(1 - \frac{v}{c}\right)$.

Dans le cas de l'effet Doppler, si on note f_e la fréquence émise par le téléphone et f_r celle reçue par l'observateur, on a $f_r = f_e \left(1 - \frac{v_f}{c}\right)$.

Si on met en équation la chute du téléphone comme celle du caillou, on a $v = gt$ et $z = \frac{1}{2} g t^2$. En éliminant le temps entre ces deux équations, il vient : $v = \sqrt{2gz}$. Ainsi, au moment du choc, $v_f = \sqrt{2gL_3}$, en notant L_3 la nouvelle estimation de la profondeur du puits. On en déduit $f_r = f_e \left(1 - \frac{\sqrt{2gL_3}}{c}\right)$, puis $L_3 = \frac{c}{2g} \left(1 - \frac{f_r}{f_e}\right)^2$. En donnant à f_e la valeur de 440 Hz et à f_r les valeurs extrêmes de 408 Hz et 405 Hz , on obtient pour L_3 l'encadrement suivant : $31 \text{ m} < L_3 < 37 \text{ m}$.

OND-17: Deux cordes reliées (Nicolas ARBEZ CCP 2015)

Similaire à un exercice fait pendant l'année. $c = \sqrt{\frac{Mg}{\mu}}$, $c_2 = \frac{c_1}{2}$, au niveau du raccord, $y_1(0, t) = y_2(0, t)$. Un nœud assure la conti-

nuité de la tension de la corde, donc $\frac{\partial y_2}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial y_1}{\partial x}(0, t)$. Coefficient de réflexion : $r = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} = -\frac{1}{3}$, et coefficient de transmission : $t = \frac{2c_2}{c_2 + c_1} = \frac{2}{3}$.

OND-18: La houle (Cécile TOINARD Saint-Cyr 2015)

OND 16.4 Cécile TOINARD St Cyr 2015
LA HOULÉ

1.) A l'équilibre, la PFD appliquée à une particule de fluide donne, dans R_{lab} , galiléen : $\vec{0} = -\text{grad } P_{eq} d\vec{z} + \mu d\vec{z} \vec{g}$
(= RFSF)
D'où $\text{grad } P_{eq} = \mu \vec{g}$

Après projection, $\frac{\partial P_{eq}}{\partial z} = \frac{dP_{eq}}{dz} = -\mu g$.

D'où $P_{eq}(z) = -\mu g z + C$. Or, $P_{eq}(0) = P_0$

$\Rightarrow P_{eq}(z) = -\mu g z + P_0$

2.) PFD en présence de houle, avec $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$:

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} d\vec{z} = -\text{grad } P d\vec{z} + \mu \vec{g} d\vec{z}. \quad (1)$$

Et l'équation de conservation de la masse, pour l'eau incompressible donne d'où $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ (2)

En projection, (1) conduit à $\mu \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x}$

d'où $\mu \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x}$ (3)

Une seconde projection donne $\mu \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} - \mu g$

d'où $\mu \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} (-\mu g z + P_0 + P(x, z, t)) - \mu g$

puis $\mu \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z}$ (4)

Enfin, (2) $\Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ (5)

3.) (3) $\Rightarrow \mu (-j\omega) v_x = -j k \tau_m(z) e^{j(kx - \omega t)} \Rightarrow v_x = \frac{k}{\mu \omega} \tau_m(z) e^{j(kx - \omega t)}$

(4) $\Rightarrow \mu (-j\omega) v_z = -\frac{d\tau_m}{dz}(z) e^{j(kx - \omega t)} \Rightarrow v_z = \frac{1}{\mu j \omega} \frac{d\tau_m}{dz}(z) e^{j(kx - \omega t)}$

(5) $\Rightarrow \frac{j k^2}{\mu \omega} \tau_m(z) + \frac{1}{\mu j \omega} \frac{d^2 \tau_m}{dz^2}(z) = 0$

4.) $\Rightarrow \frac{d^2 \tau_m}{dz^2}(z) = k^2 \tau_m(z) \Rightarrow \tau_m(z) = A e^{kz} + B e^{-kz}$

Grande profondeur et τ_m finie $\Rightarrow B = 0$
 $\hookrightarrow z \rightarrow -\infty \Rightarrow \tau_m(z) = A e^{kz}$

5.) $v_x = \frac{k}{\mu \omega} A e^{kz} e^{j(kx - \omega t)} \Rightarrow v_x = \frac{k}{\mu \omega} A e^{kz} \cos(kx - \omega t)$

$v_z = \frac{1}{\mu \omega} k A e^{kz} e^{j(kx - \omega t - \pi/2)} \Rightarrow v_z = \frac{k}{\mu \omega} A e^{kz} \sin(kx - \omega t)$

$x_p(t)$ et $z_p(t)$ sont proches de x_{p0} et z_{p0} , on a

$$\begin{aligned}\frac{dx_p}{dt}(t) &\approx \frac{kA}{\mu\omega^2} e^{kz_{p0}} \cos(kx_{p0} - \omega t) \\ &= \frac{kA}{\mu\omega^2} e^{kz_{p0}} \cos(\omega t - kx_{p0})\end{aligned}$$

$$\text{d'où } x_p(t) = \frac{kA}{\mu\omega^2} e^{kz_{p0}} \left[\sin(\omega t - kx_{p0}) + \sin(kx_{p0}) \right] + x_{p0}$$

$$\frac{dz_p}{dt}(t) \approx \frac{kA}{\mu\omega^2} e^{kz_{p0}} \sin(kx_{p0} - \omega t)$$

$$\text{d'où } z_p(t) = \frac{kA}{\mu\omega^2} e^{kz_{p0}} \cos(kx_{p0} - \omega t) + c^t$$

$$\Rightarrow z_p(t) = \frac{kA}{\mu\omega^2} e^{kz_{p0}} \left[\cos(\omega t - kx_{p0}) - \cos(kx_{p0}) \right] + z_{p0}$$

Posons $\boxed{R = \frac{kA}{\mu\omega^2} e^{kz_{p0}}}$

$$\text{on a } (x_p(t) - x_{p0} - R \sin(kx_{p0}))^2 + (z_p(t) - z_{p0} + R \cos(kx_{p0}))^2 = R^2$$

$$\Rightarrow \text{Cercle de rayon } R \text{ et de centre } C \begin{pmatrix} x_{p0} + R \sin(kx_{p0}) \\ z_{p0} - R \cos(kx_{p0}) \end{pmatrix}$$

et on voit que plus on est en profondeur, plus z_{p0} est < 0 et plus le rayon est faible.

- 1°) Hypothèses :
- $v \ll c$ donc $F_{mag} \ll F_{elec}$
 - plasma dilué
 - mvt des cations négligeables

2°) $m_e i\omega \vec{v}_e = -e \vec{E} \Rightarrow \vec{v}_e = \frac{-e}{i\omega m_e} \vec{E}$

$\vec{j} = -M_0 e \vec{v}_e \Rightarrow \vec{j} = \frac{M_0 e^2}{i\omega m_e} \vec{E}$

$\text{rot} \vec{E} = -i\omega \vec{B} \Rightarrow \text{grad} \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -i\omega \mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 i\omega \vec{E})$

$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \Rightarrow (-i\vec{k}) \cdot (-i\vec{k}) = -i\omega \mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 i\omega \vec{E})$

ou pose $\vec{k} = k \vec{u}$ $\rightarrow -k^2 = -\mu_0 \left(\frac{M_0 e^2}{m_e} - \epsilon_0 \omega^2 \right)$

$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{M_0 e^2}{\epsilon_0 m_e c^2} = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$

avec $\omega_p = e \sqrt{\frac{M_0}{\epsilon_0 m_e}}$

3°) $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ avec $k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$ pour $\omega > \omega_p$.

donc $k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2$ d'où, en faisant $\frac{d}{dk}$: $2c^2 k = 2\omega \frac{d\omega}{dk}$

puis $v_g = c^2 \frac{k}{\omega} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$

Si $\omega \gg \omega_p$, $v_g \approx c \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \right)$

Soit t_1 le temps mis par la fréquence f_1 pour arriver sur Terre

$t_1 = \frac{H}{v_{g1}} + \frac{L-H}{c}$ $t_2 = \frac{H}{v_{g2}} + \frac{L-H}{c}$ $L = \text{distance satellite-Terre}$

$\Rightarrow t_2 - t_1 = H \left(\frac{1}{v_{g2}} - \frac{1}{v_{g1}} \right) = \frac{H}{c} \left[\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_2^2} \right)^{-1/2} - \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2} \right)^{-1/2} \right]$

Or, $\omega_1 \gg \omega_p \Rightarrow t_2 - t_1 \approx \frac{H}{c} \cdot \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(\frac{1}{\omega_2^2} - \frac{1}{\omega_1^2} \right)$

$\frac{t_2 - t_1}{\frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1}} \times 4\pi^2 = \frac{H}{2c} e^2 \frac{M_0}{\epsilon_0 m_e}$

Et on voit que sur la plage étroite de fréquences affilées, $t_2 - t_1$ est fonction affine de $f_2 - f_1$. En effet, si $f_2 = f_1 + \Delta f$ avec $\Delta f \ll f_1$,

$\frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1} = \frac{1}{f_1} \left(\left(1 + \frac{\Delta f}{f_1} \right)^{-1} - 1 \right) = \frac{1}{f_1} \left(-\frac{2\Delta f}{f_1} \right) = -\frac{2\Delta f}{f_1^2}$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{He^2}{4\pi^2 c \epsilon_0 m_e} \left(-\frac{2\Delta f}{2f^2} \right) m_0$$

Sur la figure, on relève

$$\left| \frac{\Delta t}{\Delta f} \right| = \frac{\frac{31}{63} \times 200 \cdot 10^3}{(1500 - 1350) \cdot 10^6}$$

$$= \frac{31}{63} \times \frac{0,2 \times 10^{-6}}{150}$$

d'où $m_0 = 0,28 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$

c'est l'ordre de
l'ionosphère
⇓
 $\sim 10^{11} \text{ m}^{-3}$!

imaginait-il
d'une couche de
plasma de
plus en plus... ?

$$4^o) t_1 = \frac{L-H}{c} + \int_0^H \frac{dz}{v_1(z)} \approx \frac{L-H}{c} + \int_0^H \frac{dz}{c} \left(1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \right)$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{L-H}{c} + \frac{1}{c} \int_0^H dz + \frac{1}{2c} \int_0^H \frac{e^2}{\omega^2 \epsilon_0 m_e} m(z) dz$$

$$\Rightarrow t_2 - t_1 = \frac{e^2}{2\epsilon_0 m_e c} \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right) \int_0^H m(z) dz$$

Cad, simplement, (qu'on remplace $H m_0$ par $\int_0^H m(z) dz$)