Planches INP : cinquième série

INP • Planche R

■ Exercice majeur

On dispose d'une urne contenant trois jetons indiscernables numérotés 1, 2 et 3.
On effectue une série de tirages indépendants d'un jeton, avec remise.
On note :

- Y la variable aléatoire indiquant le nombre de tirages nécessaires pour obtenir deux numéros différents ;
- Z la variable aléatoire indiquant le nombre de tirages nécessaires pour avoir les trois numéros.

1) Déterminer la loi de Y.

Solution.

- Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, soit X_i la variable aléatoire donnant le numéro du jeton tiré lors du i^e tirage.
Les variables aléatoires X_i sont donc i.i.d. de loi $\mathscr{U}\left(\llbracket 1,3 \rrbracket\right)$.
- Il faut au moins deux tirages pour obtenir deux numéros différents :
$$Y(\Omega) \subset \llbracket 2, \infty \llbracket.$$
- Fixons $k \geqslant 2$. L'événement $[Y = k]$ est réalisé quand les $k-1$ premiers tirages donnent le même numéro, et le k^e tirage donne un numéro différent. De plus, le premier numéro tiré peut être 1, 2 ou 3 :
$$[Y = k] = \biguplus_{j=1}^{3} [X_1 = j, X_2 = j, \dots, X_{k-1} = j, X_k \neq j].$$
Grâce à l'additivité de la probabilité puis à l'indépendance des variables $X_1, X_2, \dots, X_k$:
$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y = k) &= \mathrm{P}\left(\biguplus_{j=1}^{3} [X_1 = j, X_2 = j, \dots, X_{k-1} = j, X_k \neq j]\right) \\
&= \sum_{j=1}^{3} \mathrm{P}\left(X_1 = j, X_2 = j, \dots, X_{k-1} = j, X_k \neq j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{3} \mathrm{P}\left(X_1 = j\right) \cdot \mathrm{P}(X_2 = j) \cdots \mathrm{P}(X_{k-1} = j) \cdot \mathrm{P}(X_k \neq j) \\
&= \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \frac{2}{3} = 3\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \cdot \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Conclusion : La loi de Y est donnée par :
$$\begin{cases} Y(\Omega) \subset \llbracket 2, \infty \llbracket \\ \forall k \geqslant 2 : \ \mathrm{P}(Y = k) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-2} \cdot \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

2) Déterminer la loi de $Y - 1$.

Solution. La variable $Y' := Y - 1$ vérifie $Y'(\Omega) \subset \llbracket 2, \infty \llbracket$ et pour tout $k \geqslant 2$:
$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y' = k) &= \mathrm{P}(Y - 1 = k) = \mathrm{P}(Y = k + 1) \\
&= \left(\tfrac{1}{3}\right)^{(k+1)-2} \tfrac{2}{3} \qquad (\text{car } k + 1 \geqslant 2) \\
&= \left(\tfrac{1}{3}\right)^{k-1} \tfrac{2}{3}.
\end{aligned}$$
On reconnait la loi géométrique de paramètre $2/3$.
Conclusion : $Y - 1 \hookrightarrow \mathscr{G}(2/3)$.

3) En déduire $\mathrm{E}(Y)$ et $\mathrm{V}(Y)$.

Solution. Puisque $Y = Y' + 1$ et que Y' admet une variance, Y admet une variance également. Espérance et variance de Y' sont connues, donc on obtient directement :
$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y) &= \mathrm{E}(Y') + \mathrm{E}(1) \qquad (\text{linéarité de l'esp.}) \\
&= \frac{1}{2/3} + 1 = \frac{5}{2} ; \\
\mathrm{V}(Y) &= \mathrm{V}(Y' + 1) = \mathrm{V}(Y') = \frac{1 - 2/3}{2/3} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

4) Déterminer la loi du couple (Y, Z).

Solution.

- Il faut au moins 3 tirages pour obtenir les 3 jetons différents :
$$Y(\Omega) \subset \llbracket 2, \infty \llbracket \quad \text{et} \quad Z(\Omega) \subset \llbracket 3, \infty \llbracket.$$
- Prenons $i \geqslant 2$ et $j \geqslant 3$; calculons $\mathrm{P}(Y = i, \ Z = j)$.
Tout d'abord, $[Y = i, Z = j] = \varnothing$ si $i \geqslant j$, donc dans ce cas $\mathrm{P}(Y = i, Z = j) = 0$.
On suppose désormais que $i < j$.
Pour chaque couple (k, ℓ) d'éléments de $\llbracket 1, 3 \rrbracket$ distincts, notons $A_{k,\ell}$ l'événement « le premier numéro observé est k, et le premier numéro observé différent de k est ℓ. ».
Les événements $A_{k,\ell}$ forment un système complet d'événements formé de $3 \cdot 2 = 6$ événements. De plus :
$$\begin{aligned}
A_{k,\ell} \cap [Y = i, Z = j] = \big[X_1 = k, \dots, X_{i-1} = k,& \\
X_i = \ell, \dots, X_{j-1} = \ell,& \\
X_j \notin \{k, \ell\}\big].&
\end{aligned}$$
On en déduit, grâce à l'indépendance de $X_1, \dots, X_j$:
$$\mathrm{P}\left(A_{k,\ell} \cap [Y = i, Z = j]\right) = \left(\tfrac{1}{3}\right)^{j-1} \cdot \tfrac{2}{3}.$$
Par la formule des probabilités totales sur le s.c.e. $(A_{k,\ell} \ ; k \neq \ell)$:
$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y = i, Z = j) &= \sum_{\substack{1 \leqslant k,\ell \leqslant 3 \\ k \neq \ell}} \mathrm{P}\left(A_{k,\ell} \cap [Y = i, Z = j]\right) \\
&= \sum_{\substack{1 \leqslant k,\ell \leqslant 3 \\ k \neq \ell}} \left(\tfrac{1}{3}\right)^{j-1} \cdot \tfrac{2}{3} \\
&= 6 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^{j-1} \cdot \tfrac{2}{3} \\
&= 4 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^{j-1}.
\end{aligned}$$

Conclusion : La loi du couple (Y, Z) est donnée par :
$$\begin{cases} Y(\Omega) \subset \llbracket 2, \infty \llbracket, \quad Z(\Omega) \subset \llbracket 3, \infty \llbracket \\ \forall i \geqslant 2, \ \forall j \geqslant 3 : \quad \mathrm{P}(Y = i, Z = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geqslant j, \\ 4 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^{j-1} & \text{si } i < j. \end{cases} \end{cases}$$

5) Déterminer la loi de Z.

Solution. On obtient la loi marginale de Z à partir de la loi jointe du couple (Y, Z) en appliquant la formule des probabilités totales sur le s.c.e. $\left([Y = i]\right)_{i \geqslant 2}$.
Pour un entier $j \geqslant 3$ fixé :
$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Z = j) &= \sum_{i=2}^{\infty} \mathrm{P}(Y = i, \ Z = j) \\
&= \sum_{i=2}^{j-1} 4 \left(\tfrac{1}{3}\right)^{j-1} + \sum_{i=j}^{\infty} 0 \\
&= 4(j-2) \left(\tfrac{1}{3}\right)^{j-1}.
\end{aligned}$$

Conclusion : La loi de la variable aléatoire Z est donnée par :
$$Z(\Omega) \subset \llbracket 3, \infty \llbracket \quad \text{et} \quad \forall j \geqslant 3 : \ \mathrm{P}(Z = j) = 4(j-2) \left(\tfrac{1}{3}\right)^{j-1}.$$

6) Les variables Y et $Z-Y$ sont-elles indépendantes ?

Solution. Pour déterminer si ces variables sont indépendantes, on calcule leur loi jointe.
Tout d'abord, $Y(\Omega)\subset [\![2,\infty[\![$ et $Z-Y\subset [\![1,\infty[\![$ (à partir du 2e numéro distinct obtenu, il faut au moins un tirage supplémentaire pour obtenir le 3e numéro).
Prenons $i\geqslant 2$ et $j\geqslant 1$; alors :

$$\mathrm{P}(Y=i,\ Z-Y=j)=\mathrm{P}(Y=i,\ Z=i+j).$$

On utilise la loi jointe de (Y,Z) : en remarquant que $i\geqslant 2$, $i+j\geqslant 3$ et que $i<i+j$, on obtient la formule :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y=i,\ Z-Y=j)&=4\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^{(i+j)-1}\\&=\left(2\left(\tfrac{1}{3}\right)^{i-1}\right)\times\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)^{j-1}\ \tfrac{2}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(Y=i)\times\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)^{j-1}\ \tfrac{2}{3}\right).\end{aligned}$$

Cette écriture de la loi jointe de $(Z,Y-Z)$ prouve à la fois que Z et $Y-Z$ sont indépendantes, et que $Y-Z\hookrightarrow\mathscr{G}(2/3)$.

■ Exercice mineur

Soit E un espace euclidien, $g\in\mathrm{O}(E)$ et $f=g-\mathrm{id}_E$.

1) Montrer que $\mathrm{Im}(f)\subset\big(\mathrm{Ker}(f)\big)^{\perp}$.
Y a-t-il égalité ?

Solution.

- Soit $x\in\mathrm{Im}(f)$: il existe $x_0\in E$ tel que :

$$x=f(x_0)=g(x_0)-x_0.$$

Montrons que $x\in\big(\mathrm{Ker}(f)\big)^{\perp}$. Soit $y\in\mathrm{Ker}(f)$; alors :

$$\begin{aligned}\langle x\,|\,y\rangle&=\langle g(x_0)-x_0\,|\,y\rangle\\&=\langle g(x_0)\,|\,y\rangle-\langle x_0\,|\,y\rangle\\&=\langle g(x_0)\,|\,y\rangle-\langle g(x_0)\,|\,g(y)\rangle&&\text{car } g\in\mathrm{O}(E)\,;\\&=\langle g(x_0)\,|\,y-g(y)\rangle\\&=-\langle g(x_0)\,|\,f(y)\rangle&&\text{car } f=g-\mathrm{id}_E\,;\\&=-\langle g(x_0)\,|\,0_E\rangle&&\text{car } y\in\mathrm{Ker}(f)\,;\\&=0.\end{aligned}$$

- On vient de montrer que $\mathrm{Im}(f)\subset\big(\mathrm{Ker}(f)\big)^{\perp}$.
De plus, comme E est de dimension finie, par le théorème du rang :

$$\begin{aligned}\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)&=\dim(E)-\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)\\&=\dim\Big(\big(\mathrm{Ker}(f)\big)^{\perp}\Big).\end{aligned}$$

Ceci prouve que $\mathrm{Im}(f)=\big(\mathrm{Ker}(f)\big)^{\perp}$.

2) Montrer que :

$$\forall x\in E,\quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g^k(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} p(x),$$

où p est la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{id}_E)$.

Solution. La question précédente prouve que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.
Prenons $x\in E$: il se décompose $x=y+z$ pour un certain $y\in\mathrm{Im}(f)$ et $z\in\mathrm{Ker}(f)$. Alors :

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g^k(x)&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g^k(y+z)\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g^k(y)+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g^k(z).\end{aligned}$$

Étudions chacun des deux termes :

∗ Puisque $y\in\mathrm{Im}(f)$, il existe $y_0\in E$ tel que $y=f(y_0)=g(x_0)-x_0$. De ce fait :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g^k(y)&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g^k\big(g(x_0)-x_0\big)\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\big(g^{k+1}(x_0)-g^k(x_0)\big)\\&=\frac{1}{n}\big(g^n(x_0)-x_0\big)\,;\qquad\text{(télescopage)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g^k(y)\right\|&=\frac{1}{n}\big(g^n(x_0)-x_0\big)\\&\leqslant\frac{1}{n}\big(\|g^n(x_0)\|+\|x_0\|\big)&&\text{(I.T.)}\\&\leqslant\frac{2\,\|x_0\|}{n}.&&\text{(car } g\in\mathrm{O}(E))\end{aligned}$$

Puisque $2\,\|x_0\|/n\longrightarrow 0$ quand $n\to\infty$, par le théorème d'encadrement : $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g^k(y)\xrightarrow[n\to\infty]{E}0_E$.

∗ Comme $z\in\mathrm{Ker}(f)$, $f(z)=0_E$ donc $g(z)=z$.
On montre par récurrence que $g^k(z)=z$ pour tout entier $k\in\mathbb{N}$. Alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g^k(z)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}z=z\xrightarrow[n\to\infty]{E}z.$$

Conclusion. Par somme de limites :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g^k(x)\xrightarrow[n\to\infty]{E}0_E+z=z.$$

Le vecteur z est le projecté orthogonal sur $\mathrm{Ker}(g)=\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_E)$.

INP • Planche S

■ Exercice majeur

On pose, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$:

$$\Psi(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x(t^2+1)}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que Ψ est bien définie et montrer qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Solution. Le théorème de transfert de continuité aux intégrales à paramètres permet de régler la question. Une fonction dominante appropriée est $\phi: t\mapsto\frac{1}{1+t^2}$, qui est intégrable sur $[0,+\infty[$.
Conclusion : La fonction Ψ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2) Montrer qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution. On applique le théorème transfert de caractère $\mathscr{C}^1$ à l'intégrale à paramètre.
Pour $x\in[a,b]\subset[0,+\infty[$, une fonction dominante appropriée est $\phi: t\mapsto\mathrm{e}^{-a\,t^2}$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$ (par exemple).
Conclusion : $\Psi\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ et :

$$\forall x\geqslant 0:\quad \Psi'(x)=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x(t^2+1)}\,\mathrm{d}t.$$

3) Calculer $\Psi(0)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Psi(x)$.

Solution.

- Par simple calcul de primitives :

$$\Psi(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\Big[\arctan(t)\Big]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}.$$

- Le théorème d'interversion $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big/\int_0^{+\infty}$ s'applique grâce à la domination par $\phi: t\mapsto\frac{1}{1+t^2}$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On obtient :

$$\lim_{x\to+\infty}\Psi(x)=\int_0^{+\infty}0\,\mathrm{d}t=0.$$

On note $A = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

4) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Psi'(x) = -A\,\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$.

Solution. Fixons $x > 0$. Alors :

$$\begin{aligned}\Psi'(x) &= -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t\\ &= -\mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\sqrt{x}t)^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $u = \sqrt{x}\,t$, de classe $\mathscr{C}^1$ strictement croissant, laissant l'intervalle $[0,+\infty[$ invariant, pour lequel $\mathrm{d}u = \sqrt{x}\,\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}\Psi'(x) &= -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\sqrt{x}t)^2}\cdot\sqrt{x}\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u\\ &= -A\,\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

5) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \Psi'(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente. En déduire la valeur de A.

Solution.

- L'intégrale sur $[1,+\infty[$ est convergente car :

$$\forall X > 1 : \quad \int_1^X \Psi'(x)\,\mathrm{d}x = \Psi(X) - \Psi(1) \xrightarrow[X\to+\infty]{} -\Psi(1), \text{ limite finie.}$$

De même sur $]0,1]$:

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad \int_\varepsilon^1 \Psi'(x)\,\mathrm{d}x = \Psi(1) - \Psi(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \Psi(1) - \Psi(0), \text{ limite finie,}$$

grâce à la continuité de Ψ en 0.

Conclusion : L'intégrale $\int_0^{+\infty} \Psi'(x)\,\mathrm{d}x$ converge et par la relation de Chasles :

$$\int_0^{+\infty} \Psi'(x)\,\mathrm{d}x = \big(\Psi(1) - \Psi(0)\big) - \Psi(1) = -\frac{\pi}{2}.$$

- En outre, grâce à la question précédente :

$$\int_0^{+\infty} \Psi'(x)\,\mathrm{d}x = -A\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

On effectue le changement de variable $x = u^2$, pour lequel $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$; on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \Psi'(x)\,\mathrm{d}x &= -A\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{\sqrt{u^2}}\cdot 2u\,\mathrm{d}u\\ &= -A\int_0^{+\infty} 2\,\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u\\ &= -2A^2.\end{aligned}$$

On en déduit que : $-2A^2 = -\frac{\pi}{2}$, d'où $A^2 = \frac{\pi}{4}$ et enfin $A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ puisque $A \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.

Conclusion : $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

■ Exercice mineur

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère N urnes numérotées de 1 à N. Dans l'urne i, il y a i boules numérotées de 1 à i.

On choisit au hasard, successivement, une urne, puis une boule dans cette urne. On note X le numéro de la boule tirée.

1) Donner la loi de X.

Solution. Notons U la variable aléatoire donnant le numéro de l'urne choisie, de sorte que U suit la loi uniforme sur $[\![1,N]\!]$, et que conditionnellement à $[U = n]$, X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.
Clairement, $X(\Omega) = [\![1,N]\!]$, et pour tout $k \in [\![1,N]\!]$, par la formule des probabilités totales sur le s.c.e. engendré par U :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X = k) &= \sum_{n=1}^{N} \mathrm{P}(U = n)\cdot\underbrace{\mathrm{P}_{[U=n]}(X = k)}_{=1/n \text{ si } k\leqslant n,\ 0 \text{ sinon}}\\ &= \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{N}\times\frac{1}{n}\\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=k}^{N}\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

La somme, qui est une tranche de la série harmonique, ne se simplifie pas.

2) Déterminer l'espérance de X.

Solution. La variable X est réelle finie, donc elle admet une espérance finie, donnée par :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \sum_{k\in X(\Omega)} k\,\mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{N}\frac{k}{N}\sum_{n=k}^{N}\frac{1}{n} = \frac{1}{N}\sum_{1\leqslant k\leqslant n\leqslant N}\frac{k}{n}\\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\,\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{N}\times\sum_{n=1}^{N}\frac{n+1}{2}\\ &= \frac{1}{2N}\times N\,\frac{(1+1)+(N+1)}{2}\\ &= \frac{N+3}{4}.\end{aligned}$$

INP • Planche T

■ Exercice majeur

On définit l'application φ qui à un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de X^2P par $X^4 - 1$.

1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

Solution.

- $\mathbb{R}_3[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel usuel.
- L'application φ est bien définie de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ car pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on peut diviser X^2P par $X^4 - 1$ puisque $X^4 - 1 \neq 0$; le reste est unique et son degré est strictement inférieur à celui de $X^4 - 1$, soit 4. En d'autres termes, il appartient à $\mathbb{R}_3[X]$.
- Montrons la linéarité de φ.
Prenons $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Écrivons les divisions euclidiennes de X^2P_1 et X^2P_2 par $X^4 - 1$:

$$\begin{aligned}X^2P_1(X) &= (X^4-1)Q_1(X) + R_1(X),\\ X^2P_2(X) &= (X^4-1)Q_2(X) + R_2(X),\end{aligned}$$

où $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ et $R_1, R_2 \in \mathbb{R}_3[X]$.
Avec ces notations :

$$\begin{aligned}&X^2\left(\alpha P_1(X) + \beta P_2(X)\right)\\ &\quad= \alpha X^2P_1(X) + \beta X^2P_2(X)\\ &\quad= \alpha\left((X^4-1)Q_1(X) + R_1(X)\right) + \beta\left((X^4-1)Q_2(X) + R_2(X)\right)\\ &\quad= (X^4-1)\left(\alpha Q_1(X) + \beta Q_2(X)\right) + \left(\alpha R_1(X) + \beta R_2(X)\right).\end{aligned}$$

Dans cette écriture, puisque $R_1, R_2 \in \mathbb{R}_3[X]$, on a également $\alpha R_1 + \beta R_2 \in \mathbb{R}_3[X]$ (cet ensemble est un espace vectoriel). On reconnait donc la division euclidienne de $X^2\left(\alpha P_1(X) + \beta P_2(X)\right)$ par $X^4 - 1$, et donc son reste. On a prouvé :

$$\varphi(\alpha P_1 + \beta P_2) = \alpha R_1(X) + \beta R_2(X) = \alpha\,\varphi(P_1) + \beta\,\varphi(P_2).$$

Conclusion : L'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2) Calculer $A = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(\varphi)$ où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Solution. Pour déterminer la matrice de φ dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$, on pose les divisions euclidiennes suivantes :

$$\begin{aligned} X^2\cdot 1 &= X^2 = 0\cdot(X^4-1)+X^2 & \text{d'où}\quad \varphi(1)&=X^2,\\ X^2\cdot X &= X^3 = 0\cdot(X^4-1)+X^3 & \varphi(X)&=X,\\ X^2\cdot X^2 &= X^4 = 1\cdot(X^4-1)+1 & \varphi(X^2)&=1,\\ X^2\cdot X^3 &= X^5 = X\cdot(X^4-1)+X & \varphi(X^3)&=X. \end{aligned}$$

Conclusion : $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}$.

3) Montrer que φ est diagonalisable.

Solution. La matrice de A de φ dans la base $\mathscr{B}$ est symétrique à coefficients réels. Par le théorème spectral, elle est donc diagonalisable. Il en va de même pour l'endomorphisme φ.

4) Quelles sont les valeurs propres de φ ?

Solution. En découpant A en 4 blocs de taille 2×2, on remarque vite que $A^2 = \mathrm{I}_4$: X^2-1 est un polynôme annulateur de A.
On en déduit que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{1, -1\}$.
Comme A est diagonalisable, ce spectre ne peut pas être vide ; de même, il ne peut pas être réduit à un singleton, car sinon A serait semblable à I_4 ou à $-I_4$, donc égale à l'une de ces deux matrices, et ce n'est pas le cas.

Conclusion : $\mathrm{Sp}(\varphi) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, -1\}$.

5) Quels sont les sous-espaces propres associés ?

Solution. On constate sans peine que $A - \mathrm{I}_4$ est de rang 2, donc que $\dim E_1 = 4-2 = 2$; on trouve 2 vecteurs propres non colinéaires suivants : $V_1 := (1,0,1,0)$ et $V_2 := (0,1,0,1)$, qui forment une base de E_1

De même, $\dim E_{-1} = 2$ et les vecteurs $V_3 := (1,0,-1,0)$ et $V_4 := (0,1,0,-1)$ en forment une base.

6) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

Solution. On a vu plus haut que $A^2 = \mathrm{I}_4$.
Cela prouve immédiatement que A est inversible et que $A^{-1} = A$ (autrement dit : φ est une symétrie).

7) φ est-elle un automorphisme ?

Solution. Puisque la matrice A est inversible, l'endomorphisme φ est bijectif ; puisque c'est un endomorphisme, il s'agit donc d'un automorphisme.

■ Exercice mineur

Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Justifier l'existence de I.

Solution. La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ est c.p.m. sur $]0,1]$.
En 0^+ : $f(t) \sim \ln(t)$ et comme $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$, la fonction f l'est aussi.
L'intégrale I est absolument convergente, donc convergente.

2) Montrer que : $I = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}$.

Solution. Développons f en série :

$$\forall\, t \in\,]0,1],\quad f(t) = \frac{\ln(t)}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n\, t^{2n} \ln(t)}_{f_n(t)}.$$

Appliquons le théorème d'interversion $\sum_{n=0}^{\infty} / \int_{]0,1]}$:

1) La série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1]$, de somme f ;

2) Les fonctions f_n et f sont c.p.m. (car continues) sur $]0,1]$;

3) Les fonctions f_n sont intégrables sur $]0,1]$.
En effet :

$$\sqrt{t}\times f_n(t) = (-1)^n\, t^{2n+1/2} \ln(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{\mathrm{CC}} 0,$$

donc f_n est négligeable devant $t \mapsto 1/\sqrt{t}$, qui est intégrable sur $]0,1]$ (intégrale de Riemann en 0^+ avec $\alpha = 1/2 < 1$).

4) La série $\sum \int_0^1 |f_n|$ converge : pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left|f_n(t)\right| \mathrm{d}t &= \int_0^1 -t^{2n} \ln(t)\,\mathrm{d}t\\ &\overset{\mathrm{IPP}}{=} \left[-\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\ln(t)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{2n}}{2n+1}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{(2n+1)^2}\\ &\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}. \end{aligned}$$

Comme la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{4n^2}$ est convergente et à termes positifs, la série $\sum \int_0^1 |f_n|$ est convergente également.

On peut donc intervertir les symboles de sommation :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n t^{2n} \ln(t)\,\mathrm{d}t\\ &\overset{\text{(IPP)}}{=} \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}. \end{aligned}$$

INP • Planche U

■ Exercice majeur

Soit $f : x \mapsto \arcsin(x)\sqrt{1-x^2}$.

1) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I que l'on précisera.

Solution. arcsin est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;1[$.
Sur cet intervalle, $x \mapsto 1-x^2$ l'est aussi, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Comme $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, leur composée $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;1[$. Par produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I := \,]-1\,;1[$.

Soit l'équation différentielle

$$(1-x^2)\,y'(x) + x\,y(x) = c(x), \qquad (*)$$

où c est une fonction continue sur I.

2) Donner $c(x)$ quand f est solution de $(*)$.

Solution. On dérive d'abord f ; pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)\\ &= 1 - \frac{x\,\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

En injectant dans l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} &(1-x^2)\,y'(x) + x\,y(x)\\ &\quad = (1-x^2) - x\sqrt{1-x^2}\,\arcsin(x) + x\,\arcsin(x)\sqrt{1-x^2}\\ &\quad = 1-x^2. \end{aligned}$$

Conclusion : y est solution de $(*)$ si l'on prend $c : x \mapsto 1-x^2$.

3) Montrer que $(*)$ admet une unique solution impaire et développable en série entière.

Solution. Procédons par analyse-synthèse.

- **Analyse.** Supposons que y soit une fonction impaire développable en série entière. Elle s'écrira :

$$\forall x \in]-R,R[: \quad y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^{2k+1}$$

pour un rayon de convergence $R > 0$ et une suite $(a_k)_{k\geqslant 0}$ de réels.
Un calcul patient donne, pour tout $x \in]-R,R[$:

$$\begin{aligned}&(1-x^2)\,y'(x) + x\,y(x)\\&\quad = a_0\,x^0 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big[(2k+1)\,a_k - 2(n-1)\,a_{k-1}\Big]\cdot x^{2k}.\end{aligned}$$

En supposant que y est solution de $(*)$, par unicité du DSE, on peut identifier les coefficients avec ceux de $1-x^2$.
On obtient :

$$a_0 = 1,\quad a_1 = -\frac{1}{3},\quad \text{et} \quad \forall\, k \geqslant 2,\ a_k = \frac{2(k-1)}{2k+1}\,a_{k-1}.$$

Tous les coefficients a_k sont uniquement déterminés par ces relations
- **Synthèse.** Réciproquement, prenons une suite $(a_k)_{k\geqslant 0}$ définie par les deux termes initiaux et la relation de récurrence ci-dessus, et y la somme de la série entière $\sum_{k\geqslant 0} a_k\,x^k$.
En appliquant la règle de d'Alembert pour les séries numériques (...) on montre que le rayon de convergence de cette série entière vaut 1.
La fonction y est donc définie sur $]-1,1[$, où elle est solution de $(*)$ en remontant les calculs faits dans la partie analyse.

Conclusion : L'équation $(*)$ admet une unique solution qui soit impaire et développable en série entière. Sur l'intervalle $]-1,1[$, elle s'écrit :

$$y(x) = x - \frac{1}{3}\,x^3 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k\,x^k,$$

où les coefficients a_k satisfont la relation :

$$\forall\, k \geqslant 2 : \quad a_k = \frac{2(k-1)}{2k+1}\,a_{k-1}.$$

4) En déduire que f admet un développement en série entière.

Solution. La fonction f et la fonction y définie dans la question précédente sont solutions du même problème de Cauchy d'ordre 1 sur l'intervalle I, sans singularité et à coefficients continus, formé de $(*)$ et de la condition initiale $y(0) = 0$.
Comme cette solution est unique, $f = y$ et ainsi f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

5) Calculer le développement en série entière de f.

Solution. Il s'agit ici d'expliciter les coefficients a_k en résolvant la relation de récurrence. Pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}a_k &= 2\cdot\frac{k-1}{2k+1}\cdot a_{k-1}\\&= 2^2\cdot\frac{k-1}{2k+1}\cdot\frac{k-2}{2k-1}\cdot a_{k-2}\\&= \cdots\\&= 2^{k-1}\cdot\frac{k-1}{2k+1}\cdot\frac{k-2}{2k-1}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{5}\cdot a_1\\&= -2^{k-1}\cdot\frac{k-1}{2k+1}\cdot\frac{k-2}{2k-1}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\\&= -2^{k-1}\cdot(k-1)!\cdot\frac{1}{(2k+1)\cdot(2k-1)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1}\\&= -\frac{2^k\cdot k!}{2k}\cdot\frac{2^k\cdot k!}{(2k+1)!}\\&= -\frac{4^k\,(k!)^2}{2k\,(2k+1)!}.\end{aligned}$$

On remarque que cette formule est également valable pour $k=1$ (rappelons que $a_1 = -1/3$) mais pas pour $a_0 = 1$.
Conclusion : Pour tout réel $x \in]-1,1[$:

$$\arcsin(x)\,\sqrt{1-x^2} = x - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^k\,(k!)^2}{2k\,(2k+1)!}\,x^{2k+1}.$$

■ Exercice mineur

Soit A la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} a+b & a\,b & 0 & \cdots & 0\\ 1 & a+b & a\,b & \ddots & \vdots\\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a\,b\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b\end{pmatrix},$$

où $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $d_n = \det(A_n)$.

1) Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$.

Solution. Soit $n \geqslant 3$. En développant le déterminant d'abord par rapport à la première colonne :

$$\begin{aligned}d_n = (a+b)\cdot &\begin{vmatrix} a+b & a\,b & 0 & \cdots & 0\\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a\,b\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b\end{vmatrix}_{(n-1)}\\ &- \begin{vmatrix} a\,b & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & a+b & a\,b & \ddots & \vdots\\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a\,b\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b\end{vmatrix}_{(n-1)}.\end{aligned}$$

Le premier déterminant est d_{n-1}.
On développe le second suivant la première ligne :

$$\begin{aligned}d_n &= (a+b)\cdot d_{n-1} - a\,b\cdot\begin{vmatrix} a+b & a\,b & 0 & \cdots & 0\\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a\,b\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b\end{vmatrix}_{(n-2)}\\ &= (a+b)\cdot d_{n-1} - a\,b\cdot d_{n-2}.\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall\, n \geqslant 3,\ d_n = (a+b)\cdot d_{n-1} - a\,b\cdot d_{n-2}$.

2) En déduire une expression de d_n en fonction de n, a et b.

Solution.

∗ La suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$ est une *suite récurrente linéaire d'ordre 2.* Son équation caractéristique est :

$$\begin{aligned}x^2 = (a+b)\,x - a\,b \quad &\iff \quad x^2 - (a+b)\,x + a\,b = 0\\ &\iff \quad (x-a)(x-b) = 0\\ &\iff \quad x = a \quad \text{ou} \quad x = b.\end{aligned}$$

Il existe donc deux constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ telles que :

$$\begin{aligned}&\text{Si } a \neq b : && \forall\, n \geqslant 1,\ d_n = C_1\,a^n + C_2\,b^n,\\ &\text{Si } a = b : && \forall\, n \geqslant 1,\ d_n = C_1\,a^n + C_2\,n\,a^{n-1}.\end{aligned}$$

∗ Pour trouver la valeur des constantes C_1 et C_2, il faut deux valeurs de la suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$.
On a déjà : $d_1 = \det\big((a+b)\,\mathrm{I}_1\big) = a+b$.
De plus : $d_2 = \begin{vmatrix} a+b & a\,b\\ 1 & a+b\end{vmatrix} = (a+b)^2 - a\,b$.
Plutôt que d'utiliser d_2, on ajoute un terme d_0 respectant la relation de récurrence ; on choisit d_0 pour que :

$$\begin{aligned}&d_2 = (a+b)\,d_1 - ab\,d_0\\ &\iff (a+b)^2 - ab = (a+b)^2 - ab\,d_0\\ &\iff ab = ab\,d_0\\ &\Longleftarrow d_0 = 1.\end{aligned}$$

* **Dance le cas où $a \neq b$,** on a :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ a\,C_1 + b\,C_2 = a + b \end{cases}$$

d'où on tire $C_2 = \frac{b}{b-a}$ puis $C_1 = \frac{a}{a-b}$.

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ d_n = \dfrac{a}{a-b}\, a^n + \dfrac{b}{b-a}\, b^n.$

* **Dans le cas où $a = b$,** on a :

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ a\,C_1 + C_2 = 2\,a \end{cases} \quad \text{d'où } C_1 = 1 \text{ et } C_2 = a.$$

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ d_n = a^n + n\,a^n = (n+1)\,a^n.$