

Éléments de correction des révisions

Exercice 1 : Étude d'une moto

Question 1 : Déterminer la vitesse de rotation du moteur (en tr/min) lorsque la moto roule à 130 km/h en 6^{ème} vitesse

Les éléments qui permettent de mettre en mouvement la moto sont :

Moteur->chaîne de transmission primaire->boîte de vitesse->chaîne de transmission-> roue arrière

Si la roue roule sans glisser sur le sol : $V_{roue} = R \times \omega_{roue}$

De plus on a pour les transmetteurs : $\frac{\omega_{roue}}{\omega_{red}} = \frac{15}{48} \quad \frac{\omega_{red}}{\omega_{moteur}} = \frac{33 \times 13}{61 \times 12}$

Il vient donc : $V = R \times \frac{15}{48} \times \frac{33 \times 13}{61 \times 12} \times \omega_{moteur}$

Ou $\omega_{moteur} = \frac{48.61.12}{R.15.33.13} V = \frac{48.61.12}{0,29.15.33.13} \times \frac{130}{3,6} = 680 \text{ rad.s}^{-1}$

$$N_{moteur} = 680 \times \frac{2\pi}{60} = 6493 \text{ tr.min}^{-1}$$

Question 2 : Montrer que $X_4 = 0$ (en précisant le système isolé, Bilan des actions mécaniques extérieures ...).

Remarque : La moto roule à vitesse constante (sans accélération) en ligne droite, on peut donc utiliser le principe fondamental de la statique.

On isole la roue avant par rapport au référentiel terrestre sous l'action de :

- Action du sol sur la roue avant : $\{\mathcal{T}(sol \rightarrow 4)\} = \left\{ \begin{matrix} X_4 \vec{x}_0 + Y_4 \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{A_4}$ (force)
- Action de la direction sur la roue (pivot plane d'axe $(O_4, \vec{z}_0)$) : $\{\mathcal{T}(dir \rightarrow 4)\} = \left\{ \begin{matrix} X_{O_4} \vec{x}_0 + Y_{O_4} \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{O_4}$
- Poids de la roue négligé

La roue est en équilibre sous l'action de deux forces, elles ont donc la même droite d'action ($A_4 O_4$) la même norme et sont de sens opposé.

On en déduit qu'il n'y a pas d'effort selon $\vec{x}_0$, ainsi $\boxed{X_4 = 0}$ ($= X_{O_4}$)

Question 3 : Déterminer les expressions littérales de X_3 , Y_3 et Y_4 en fonction de m_1 , V et des paramètres dimensionnels. Faire l'application numérique pour $V = 130 \text{ km.h}^{-1}$.

On isole la moto avec ses roues par rapport au référentiel terrestre, puis on effectue le bilan des actions mécaniques extérieures :

- Sol sur roue avant : $\{\mathcal{T}(sol \rightarrow 4)\} = \left\{ \begin{matrix} Y_4 \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{A_4}$
- Sol sur roue arrière : $\{\mathcal{T}(sol \rightarrow 3)\} = \left\{ \begin{matrix} X_3 \vec{x}_0 + Y_3 \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{A_3}$
- Poids sur la moto : $\{\mathcal{T}(g \rightarrow moto)\} = \left\{ \begin{matrix} -m_1 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G$

- Action du vent et résistance au roulement : $\{\mathcal{T}(aero \rightarrow moto)\} = \begin{Bmatrix} F_t \vec{x}_0 = -K_r \cdot V^2 \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$

On applique le principe fondamental de la statique (moment en A_3 (ou A_4) pour éviter de résoudre un système).

$$\text{TRS} / \vec{x}_0 : X_3 - K_r \cdot V^2 = 0 \text{ donc } \boxed{X_3 = K_r \cdot V^2}$$

$$\text{TRS} / \vec{y}_0 : Y_4 + Y_3 - m_1 g = 0$$

$$\text{TMS en } A_3 / \vec{z}_0 \text{ (avec les bras de levier)} : Y_4(a_3 + a_4) + 0 - m_1 g a_3 + K_r \cdot V^2(h + R)$$

$$\boxed{Y_4 = \frac{m_1 g a_3 - K_r \cdot V^2(h+R)}{a_3 + a_4}} \text{ et } \boxed{Y_3 = \frac{m_1 g a_4 + K_r \cdot V^2(h+R)}{a_3 + a_4}}$$

Applications numériques avec $V = 130 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 36,1 \text{ m/s}$

$$\boxed{X_3 = 495,5 \text{ N} ; \quad Y_4 = 975,9 \text{ N} ; \quad Y_3 = 1770,9 \text{ N}}$$

Question 4 : En isolant la roue arrière, déterminer le couple exercé sur la roue arrière C_{roue} en fonction de X_3 .

On isole la roue arrière (3) soumise aux actions de :

- Cadre sur roue arrière (pivot d'axe plane d'axe $(O_3, \vec{z}_0)$) :

$$\{\mathcal{T}(dir \rightarrow 3)\} = \begin{Bmatrix} X_{O_3} \vec{x}_0 + Y_{O_3} \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{O_3} \text{ (2 inconnues)}$$

- Sol sur la roue : $\{\mathcal{T}(sol \rightarrow 3)\} = \begin{Bmatrix} X_3 \vec{x}_0 + Y_3 \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{A_3}$
- Couple sur roue : $\{\mathcal{T}(\rightarrow 3)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{roue} \vec{z}_0 \end{Bmatrix}_{A_3}$

Pour ne pas faire intervenir les inconnues de la liaison pivot plane, on utilise le théorème du moment statique en O_4 projeté sur $\vec{z}_0$.

$$0 + X_3 \cdot R + C_{roue} = 0 \text{ donc } \boxed{C_{roue} = -X_3 \cdot R}$$

Question 5 : En déduire le couple moteur nécessaire pour rouler à 130 km/h en 6^{ème} vitesse.

$$\text{Avec les relations de l'énoncé : } C_m = \frac{33 \times 13}{61 \times 12} C_{red} = \frac{33 \times 13 \times 15}{61 \times 12 \times 48} C_{roue} = -\frac{33 \times 13 \times 15}{61 \times 12 \times 48} \times X_3 \cdot R$$

$$\boxed{C_m = 26,3 \text{ N.m}}$$

Remarque le couple maximal de cette moto et de 5,7 kg.m (57 N.m)

Question 6 : Déterminer les valeurs numériques de X_3 , Y_3 et Y_4 , si on vérifie le critère d'accélération de l'exigence EF_1 .

Si on suppose une accélération constante de 0 à 100 km/h en 5s, on obtient :

$$\gamma = \frac{100}{3,6 \times 5} = 5,55 \text{ m.s}^{-2}$$

$$X_3 = 1555,5 \text{ N} ; \quad Y_3 = 2131,6 \text{ N} ; \quad Y_4 = 615,2 \text{ N}$$

Question 7 : Montrer que le pneu arrière ne patine pas lors de l'accélération.

L'effort tangentiel est X_3 , l'effort normal est Y_3 , d'après la loi de Coulomb, il y adhérence si :

$$X_3 \leq f \times Y_3$$

On a bien : $1555,5 < 0,8 \times 2131,6 = 1705$ donc il y a adhérence de la roue arrière sur le sol, elle ne patine pas.

Question 8 : Vérifier que la roue avant ne décolle pas du sol lors de l'accélération.

$Y_4 > 0$ donc la roue avant ne décolle pas.

Exercice 2 : Voile solaire de la seine musicale

Question 9 : Déterminer par intégration l'expression du moment de l'action mécanique du vent selon l'axe $(O; \vec{z})$, $\vec{M}_{O,vent} \cdot \vec{z}$, s'opposant à la rotation de la voile autour de l'axe $(O; \vec{z})$ en fonction de R , f et α .

$$\vec{M}_{O,vent} \cdot \vec{z} = \int \overrightarrow{OP} \wedge d\vec{F}_{vent} \cdot \vec{z} \quad (\text{car } \vec{z} \text{ est fixe})$$

On peut déjà calculer le moment élémentaire :

$$\begin{aligned} d\vec{M}_{O,vent} \cdot \vec{z} &= (\overrightarrow{OP} \wedge d\vec{F}_{vent}) \cdot \vec{z} = (R\vec{e}_r \wedge f dS\vec{u}) \cdot \vec{z} = (R(\cos \theta \vec{z} + \sin \theta \vec{t}) \wedge f dS\vec{u}) \cdot \vec{z} \\ &= \underbrace{(R(\cos \theta \vec{z}) \wedge f dS\vec{u}) \cdot \vec{z}}_{0 \text{ car produit mixte avec 2 fois } \vec{z}} + (R \sin \theta f dS (\vec{t} \wedge \vec{u})) \cdot \vec{z} \end{aligned}$$

Or $(\vec{t} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{z} = \sin(\alpha - \varphi) \vec{z} \cdot \vec{z} = \sin(\alpha - \varphi)$, donc :

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O,vent} \cdot \vec{z} &= \iint R^3 f \sin^2 \theta \sin(\alpha - \varphi) d\theta d\varphi \\ &= R^3 f \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \int_{\varphi=-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \sin(\alpha - \varphi) d\varphi \end{aligned}$$

$$\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta = \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\int_{\varphi=-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \sin(\alpha - \varphi) d\varphi = [\cos(\alpha - \varphi)]_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{8}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{8}\right) = 2 \sin \alpha \sin \frac{\pi}{8}$$

Ou

$$\int_{\varphi=-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \sin(\alpha - \varphi) d\varphi = \int_{\varphi=-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} (\sin \alpha \cos \varphi - \sin \varphi \cos \alpha) d\varphi = \sin \alpha [\sin \varphi]_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} = \sin \alpha \cdot 2 \sin \frac{\pi}{8}$$

Au final :

$$\boxed{\vec{M}_{O,vent} \cdot \vec{z} = \frac{\pi}{2} R^3 f \sin \alpha \sin \frac{\pi}{8}}$$

Question 10 : On définit F_{vent} tel que $(\overrightarrow{OC_G} \wedge F_{vent} \vec{x}_{C_G}) \cdot \vec{z} = \vec{M}_{O,vent} \cdot \vec{z}$, En déduire l'expression de F_{vent} , l'effort du vent au point C_G s'opposant au déplacement du chariot central.

$$(\overrightarrow{OC_G} \wedge F_{vent} \vec{x}_{C_G}) \cdot \vec{z} = \vec{M}_{O,vent} \cdot \vec{z} \Leftrightarrow (R\vec{y}_{C_G} \wedge F_{vent} \vec{x}_{C_G}) \cdot \vec{z} = R^3 f \sin \alpha \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{8}$$

$$\Leftrightarrow -RF_{vent} = R^3 f \sin \alpha \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow \boxed{F_{vent} = -R^2 f \sin \alpha \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{8}}$$

Question 11 : Pour quelle valeur de α cet effort est-il maximal ? Déterminer la valeur maximale de $|F_{\text{vent}}|$.

Cet effort est maximal pour $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, on alors $|F_{\text{vent}}| = R^2 f \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{8}$

$$\text{A.N. } |F_{\text{vent}}| = 22,750^2 \cdot 54,7 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{8} = 17018 \text{ N}$$

Question 12 : En isolant l'ensemble $cc = \{\text{chariot central} + \text{galets de roulement}\}$ et en précisant le théorème utilisé déterminer $F_I + F_J$.

On isole $cc = \{\text{chariot central} + \text{galets de roulement}\}$ en équilibre par rapport au sol (galiléen)

BAME (Bilan des Actions Mécaniques Extérieures) :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \{\tau_{pes \rightarrow cc}^I\} &= \left\{ \begin{matrix} -m_{cc} \cdot g \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G & \bullet \quad \{\tau_{r \rightarrow cc}^J\} &= \left\{ \begin{matrix} F_J \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_J \\ \bullet \quad \{\tau_{r \rightarrow cc}^I\} &= \left\{ \begin{matrix} F_I \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_I & \bullet \quad \{\tau_{v \rightarrow cc}\} &= \left\{ \begin{matrix} -\frac{m_v}{2} \cdot g \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_F \end{aligned}$$

L'ensemble est en mouvement rectiligne uniforme, on peut alors lui appliquer le théorème de la résultante statique en projection suivant $\vec{z}$:

$$\sum \vec{F}_{ext \rightarrow cc} \cdot \vec{z} = 0 \Leftrightarrow -\frac{m_v}{2} \cdot g - m_{cc} \cdot g + F_I + F_J = 0 \Leftrightarrow F_I + F_J = \left(\frac{m_v}{2} + m_{cc} \right) g$$

Question 13 : Exprimer le moment de résistance au roulement en C , noté $\vec{M}_C$, en fonction de F_I et δ .

$$\vec{M}_C = \vec{M}_I + \vec{CI} \wedge F_I \vec{z} = -\delta F_I \vec{y}_{CG}$$

Question 14 : Par analogie, exprimer $\vec{M}_D$ en fonction de F_J et δ , puis exprimer le moment de résistance au roulement du chariot central $\vec{M}_{cc} = \vec{M}_C + \vec{M}_D$ en fonction de δ , m_v , m_{cc} et g .

Par analogie $\vec{M}_D = -\delta F_J \vec{y}_{CG}$

$$\text{Et } \vec{M}_{cc} = \vec{M}_C + \vec{M}_D = -\delta (F_I + F_J) \vec{y}_{CG} = -\delta g \left(\frac{m_v}{2} + m_{cc} \right) \vec{y}_{CG} = \vec{M}_{cc}$$

Question 15 : Par analogie, déterminer le moment de résistance au roulement des galets de roulement du chariot latéral, noté $\vec{M}_{cl}$. En déduire le moment de résistance au roulement total des galets de roulement, $\vec{M}_{glob}$. Effectuer l'application numérique.

Le chariot latéral a exactement la même géométrie et les mêmes actions mécaniques, seul le poids du chariot change donc $\vec{M}_{cl} = -\delta g \left(\frac{m_v}{2} + m_{cl} \right) \vec{y}_{CG}$

$$\text{On en déduit } \vec{M}_{glob} = \vec{M}_{cc} + \vec{M}_{cl} = -\delta g (m_v + m_{cc} + m_{cl}) \vec{y}_{CG}$$

$$\text{AN : } |\vec{M}_{glob}| = 0,005 \times 9,81 (120\,000 + 15\,000 + 8\,000) = 7014 \text{ N.m}$$