

Trousse de survie - correction partielle

2026-2027

Exercice 3 :

Soient $x, y \in \mathbb{R}^*$. Réduire les expressions suivantes :

1. $A = x^{-1} \times \frac{x^7}{x^4}.$

2. $B = \frac{x^2}{(x^{-2})^3}.$

3. $C = \frac{x^{-2}y^3}{(xy^{-1})^3}.$

1. $A = x^2.$

2. $B = x^8.$

3. $C = \frac{y^6}{x^5}.$

Exercice 4 :

Réduire les expressions suivantes :

1. $A = 9^{n+2} - 9^{n+1} + 2 \times 3^{2n}.$

2. $B = \frac{2}{4^n} - 7 \times 2^{-2n-1} + 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$

3. $C = 3^{2n}(-1)^n - (-9)^n.$

L'astuce est d'utiliser le fait que $a^{n+p} = a^n a^p$ et $a^{np} = (a^n)^p$, afin de factoriser le plus possible les expressions.

1.

$$\begin{aligned} A &= 9^n 9^2 - 9^n \times 9 + 2 \times 9^n \\ &= 9^n (81 - 9 + 2) \\ A &= 74 \times 9^n \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} B &= \frac{2}{4^n} - 7 \frac{1}{2^{2n+1}} + 5 \frac{1}{2^{2n}} \\ &= 2 \frac{1}{4^n} - 7 \frac{1}{4^n} \frac{1}{2} + 5 \frac{1}{4^n} \\ &= \frac{1}{4^n} \left(2 - \frac{7}{2} + 5 \right) \\ B &= \frac{7}{2} \times \frac{1}{4^n} = \frac{7}{2 \times 4^n} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} C &= (3^2)^n (-1)^n - (-1 \times 9)^n \\ &= 9^n (-1)^n - (-1)^n 9^n \\ C &= 0 \end{aligned}$$

Exercice 7 :

Résoudre les systèmes linéaires suivants en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

1. $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x - y = -2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x - 3y = 1 \\ 7x - y = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - 3y = 3x \\ x - y = y \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x + 4y - 4z = -8 \\ 3x + 9y - 6z = 9 \\ 4x + 17y - 11z = 41 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x - y = 0 \\ -3x + 4y + 2z = 5 \\ -2x + 3y + z = 3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 4x + y + z = 3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 4x - y - z = 3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} -x + 6y - z = 7 \\ 2x - 5y + 3z = 2 \end{cases}$

5.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - y = 0 \\ -3x + 4y + 2z = 5 \\ -2x + 3y + z = 3 \end{cases} &\xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1, L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1] \begin{cases} x - y = 0 \\ y + 2z = 5 \\ y + z = 3 \end{cases} \\ &\xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow L_2 - L_3] \begin{cases} x - y = 0 \\ y + 2z = 5 \\ z = 2 \end{cases} \\ &\xLeftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 4x + y + z = 3 \end{cases} &\xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2, L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3] \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3y - 3z = -3 \\ y - 3z = -1 \end{cases} \\ &\xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow L_2 - 3L_3] \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3y - 3z = -3 \\ 6z = 0 \end{cases} \\ &\xLeftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 4x - y - z = 3 \end{cases} &\xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2, L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3] \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3y + 3z = -3 \\ 3y + 3z = -1 \end{cases} \\ &\xLeftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3y + 3z = -3 \\ 0 = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Système incompatible.

8.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ y + 2z = 1 \\ 2x - y + z = 8 \end{cases} &\xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3] \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ y + 2z = 1 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases} \\ &\xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow 3L_2 - L_3] \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ y + 2z = 1 \\ +3z = 3 \end{cases} \\ &\xLeftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

9. Ce système aura nécessairement une inconnue secondaire, puisqu'il n'y a que deux équations pour 3 inconnues.

nues.

$$\left\{ \begin{array}{l} -x + 6y - z = 7 \\ 2x - 5y + 3z = 2 \end{array} \right. \overset{L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{l} -x + 6y - z = 7 \\ 7y + z = 16 \end{array} \right. \\ \iff \left\{ \begin{array}{l} x = -23 + 13y \\ z = 16 - 7y \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$