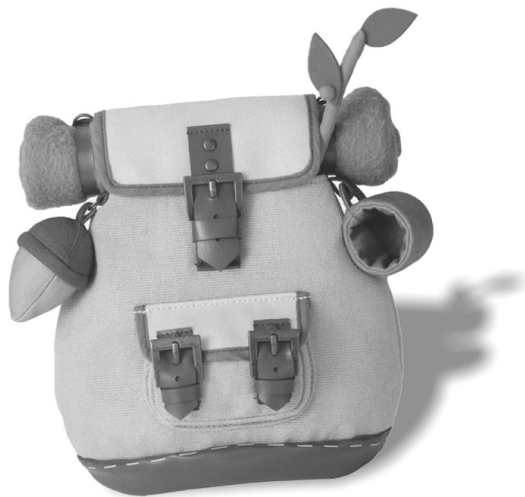


Chapitre 0

: La trousse de survie

b.a. ba sur les fonctions, le calcul et les équations pour bien commencer l'année.



Contenu :

I.	Les fonctions	3
1)	Qu'est-ce qu'une fonction ?	3
2)	Ensemble de définition :	4
3)	Composition de fonctions	5
II.	Rappels sur les fonctions "élémentaires"	6
1)	Puissances entières : $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$	6
2)	Racine carré : $x \mapsto \sqrt{x}$	7
3)	Valeur absolue : $x \mapsto x $	7
III.	Fonctions "avancées"	8
1)	Exponentielle : $x \mapsto \exp(x)$ (ou $x \mapsto e^x$)	8
2)	Logarithme népérien : $x \mapsto \ln(x)$	8
IV.	Fonctions trigonométriques :	9
1)	Définitions :	9
2)	Valeurs à connaître :	9
3)	Formules :	9
4)	Représentations graphiques :	10
V.	Calcul élémentaire	11
1)	Rappels	11
a)	Fractions	11
b)	Puissances entières	12
c)	Priorités calculatoires	12
2)	Identités remarquables	13
a)	Distributivité	13
b)	Identités remarquables	13
VI.	Résolution d'équations élémentaires et de petits systèmes linéaires d'équations	13
1)	Généralités :	13
a)	Vocabulaire :	13
b)	Opérations équivalentes :	14
c)	Utilisation de la factorisation :	15
2)	Equations du second degré	16
3)	Systèmes d'équations linéaires	18
a)	Généralités	18
b)	Systèmes étagés :	19
c)	Méthode de réduction par pivot de Gauss	21

I. Les fonctions

1) Qu'est-ce qu'une fonction ?



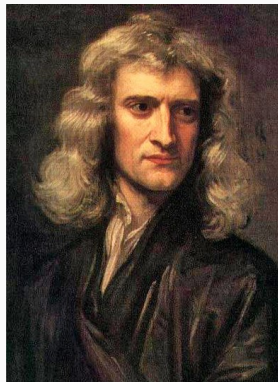
Définition :

Remarques :

- Le plus souvent en ce début d'année, x sera un nombre réel. On pourra utiliser des "fonctions" sur des éléments autres, comme des vecteurs, des matrices, des événements, etc. On parlera alors d'**applications**.
- Intuitivement, une fonction est une sorte de machine qui effectue une opération sur des nombres. Par exemple, la machine "élever au carré" prend un nombre (qu'on aime bien appeler x) et le multiplie par lui même (c'est à dire x^2).
- Attention, ce qu'on appelle fonction, c'est la machine. Ainsi, x^2 n'est pas la fonction carré, mais l'image par la fonction carré de x ...

? Le saviez-vous ?

AU COEUR DE L'ANALYSE : LEIBNIZ ET NEWTON



L'étude des fonctions est au coeur des recherches en mathématiques au XVIII^e siècle, et deux célèbres fondateurs de cette étude sont Gottfried Wilhelm Leibniz (Allemagne, 1646-1716) et Isaac Newton (Angleterre, 1642-1727).

Le terme "fonction" est introduit par Leibniz, à partir du mot latin *functio* ("remplir une tâche").

Leibniz et Newton se sont opposés sur plusieurs points. Les deux ont revendiqué la paternité du calcul infinitésimal (les dérivées, les intégrales, les limites, etc.), mais leur opposition la plus forte concerne la physique.

Malgré son éducation fondamentalement religieuse, Newton a établi les lois de la physique à partir d'observations, sans chercher de raison divine derrière ce qu'il découvrait.

Leibniz, de son côté, refusait tout ce qui pouvait remettre en question la "perfection divine", ce qui engendra quelques conflits entre les deux hommes....

2) Ensemble de définition :



Définition :

On dit qu'une fonction f est **définie** sur un ensemble D si et seulement si

On appelle alors **ensemble de définition** le plus grand ensemble sur lequel la fonction est définie. Si la fonction s'appelle f , cet ensemble est souvent noté D_f (et si elle s'appelle g , on pourra noter D_g , etc...).

Exemple :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x-1}$.



A noter :

RESTRICTION DE L'ENSEMBLE

On n'aura pas toujours besoin de travailler sur l'ensemble "maximum" de définition d'une fonction. Dans l'exemple ci dessus, on pourrait très bien dire que f est définie sur l'intervalle $[2; 3]$, puisque "pour tout x dans l'intervalle $[2; 3]$, $f(x)$ existe". Si l'on n'étudie f que sur $[2; 3]$, on dira qu'on **restreint** f à l'intervalle $[2; 3]$.



NOTATION

Si f est définie sur un ensemble E avec des images dans un ensemble F , on pourra utiliser la notation suivante :

$$f : \begin{array}{l} E \rightarrow F \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$



deux flèches de formes différentes : $\rightarrow$ et $\mapsto$.

Exemple :

La fonction f définie pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{1}{x-1}$ peut s'écrire :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x-1} \end{array}$$

Si on veut parler de sa restriction à l'intervalle $[2; 3]$, on pourra écrire :

$$f : \begin{array}{l} [2; 3] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x-1} \end{array}$$

Enfin, l'ensemble d'arrivée, ici $\mathbb{R}$, pourrait être affiné avec une étude de la fonction, mais dans un premier temps, indiquer $\mathbb{R}$ en arrivée est suffisant.

3) Composition de fonctions



Définition :

si f et g sont deux fonctions telles que, pour certains nombres x , le calcul de $f(g(x))$ a un sens, on dit qu'on a composé g par f et on peut noter $f \circ g$ la fonction obtenue.

Exemple :

$x \mapsto \frac{1}{x-1}$ est la composition de $g : x \mapsto$ par $f : x \mapsto$.



Méthode : DÉTERMINATION DE L'ENSEMBLE DE DÉFINITION D'UNE COMPOSITION

Soit une fonction de la forme $x \mapsto f(g(x))$, avec f définie sur un ensemble E et g définie sur un ensemble G , alors :

$x \mapsto f(g(x))$ est définie si et seulement si $g(x)$ est définie et f définie en $g(x)$.

On commencera donc toujours par regarder la fonction qui est "à l'intérieur" (ici, g), avant de chercher à quelle(s) condition(s) sur x les images de x par cette fonction sont dans le domaine de définition de la fonction qui "englobe" tout ça (la fonction f).

Exemple :

Reprenons l'étude de $x \mapsto \frac{1}{x-1}$

II. Rappels sur les fonctions "élémentaires"

1) Puissances entières : $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$

Définition :

Définies sur $\mathbb{R}$ si $n \geq 0$, ou $\mathbb{R}^*$ si $n \leq 0$.

(i) pour $n = 0$: $x^0 = 1$

(ii) si $n > 0$,

$$x^n = x \times x^{n-1} = \underbrace{x \times \dots \times x}_{n \text{ facteurs}}$$

(iii) si $n < 0$ et $x \neq 0$,

$$x^n = \left(\frac{1}{x}\right)^{-n} = \underbrace{\frac{1}{x} \times \dots \times \frac{1}{x}}_{-n \text{ facteurs}}$$

Limites :

si $n > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$.

si $n < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = 0$.

Dérivation et primitive :

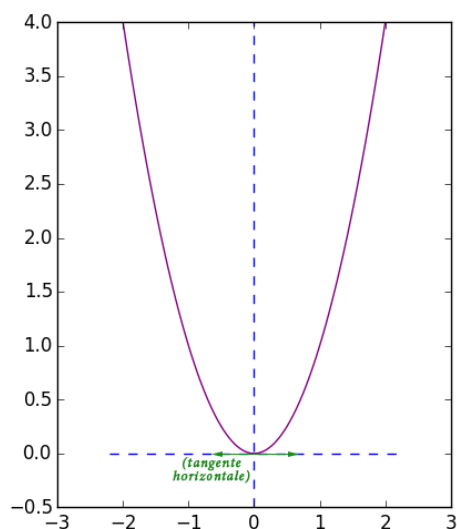
Dérivable sur $\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ et sur $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$.

Dérivée : $x \mapsto nx^{n-1}$. (même si $n < 0$...)

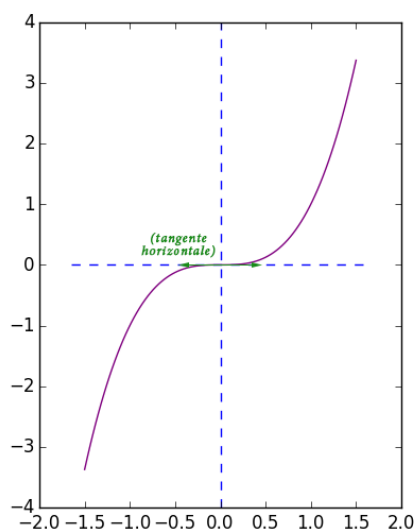
Une primitive :

si $n \neq -1$, $x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$.

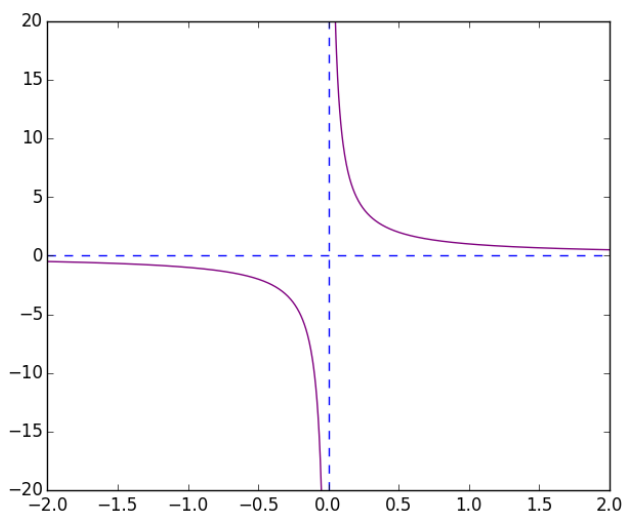
si $n = -1$, $x \mapsto \ln(|x|)$.



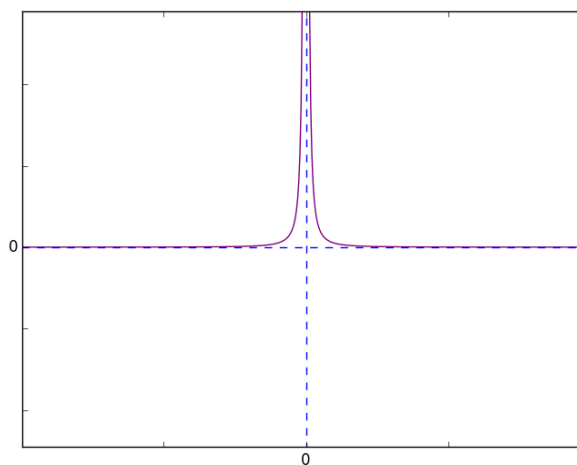
$n > 0$ et pair



$n > 0$ et impair



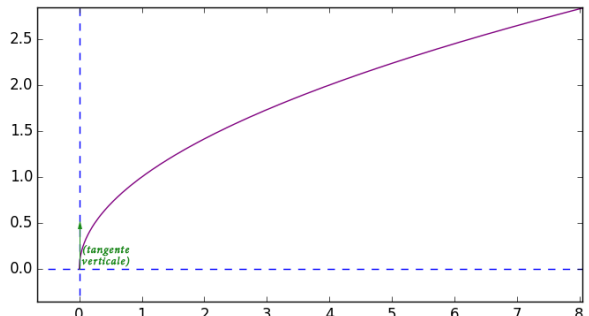
$n < 0$ et impair



$n < 0$ et pair

2) Racine carré : $x \mapsto \sqrt{x}$

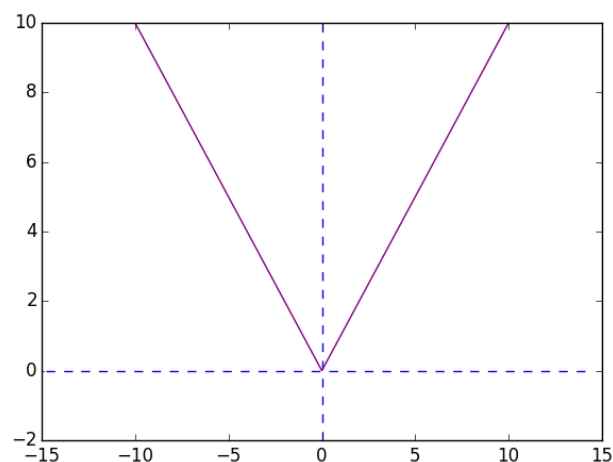
Définition :
Fonction réciproque de $x \mapsto x^2$. Définie sur $\mathbb{R}_+$.
Propriété de réciprocité :
1. Pour tout $x \geq 0$, $(\sqrt{x})^2 = x$ 2. $\triangle$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = x $.
Propriétés de calculs :
Pour tout x et y positifs ou nuls : 1. $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ 2. (si $y \neq 0$) $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ $\triangle$: L'hypothèse x et y positif est essentielle car $\sqrt{xy}$ peut être défini mais pas $\sqrt{x}$ ni $\sqrt{y}$! $\triangle$: $\sqrt{x+y}$ n'est pas en général égal à $\sqrt{x} + \sqrt{y}$...

Dérivation et primitive :
Dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
Dérivée : $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Primitive : $x \mapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x}$

Particularité :
Bien que $x \mapsto \sqrt{x}$ ne soit pas dérivable en 0, elle y est tout de même définie (avec $\sqrt{0} = 0$) et on a une tangente (verticale)

3) Valeur absolue : $x \mapsto |x|$

Définition :
Définie sur $\mathbb{R}$ par :
$ \cdot : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{matrix}$
Dérivation et primitive
Non dérivable en 0. Pour l'intégration comme pour la dérivation de fonctions contenant des valeurs absolues, on restreint l'ensemble d'étude afin de remplacer la valeur absolue.

Propriétés :
Pour tout x et y réels
(i) $ x \geq 0$
(iii) $ xy = x y $
(iv) $ x + y \leq x + y $



III. Fonctions "avancées"

1) Exponentielle : $x \mapsto \exp(x)$ (ou $x \mapsto e^x$)

Ensemble de définition et propriété :

Définie sur $\mathbb{R}$.
Elle vérifie :
(i) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$
(ii) $e^0 = 1$

Limites :

- (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

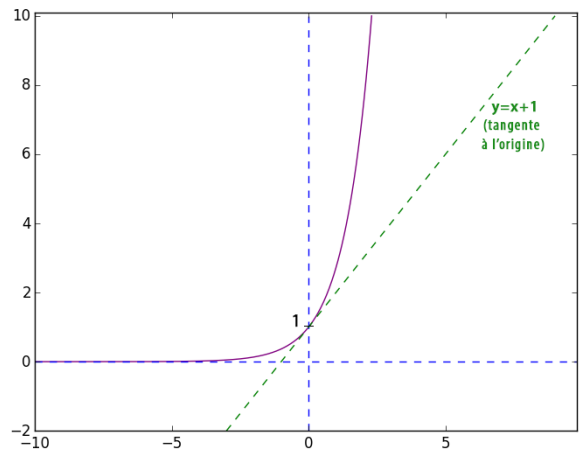
Dérivation et primitive :

Dérivable sur $\mathbb{R}$.
Dérivée : $\exp$.
Une primitive : $\exp$.

Propriétés de calcul :

Pour tout x et y réels :

- (i) $e^x e^y = e^{x+y}$
- (ii) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$



2) Logarithme népérien : $x \mapsto \ln(x)$

Définition et propriétés

Définie sur $\mathbb{R}_+^*$ comme étant l'unique primitive à $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 ou comme bijection réciproque de $\exp$.
Valeurs clés :
(i) $\ln(1) = 0$
(ii) $\ln(e) = 1$

Limites :

- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

Dérivation et primitive :

Dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$.
Une primitive : $x \mapsto x \ln x - x$.

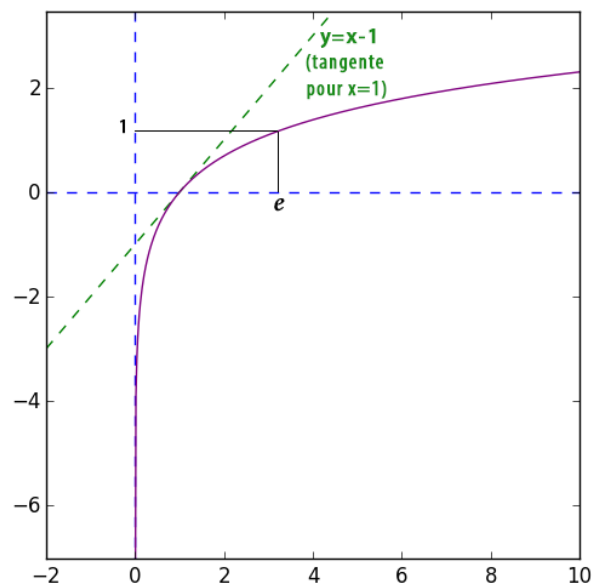
Réciprocité :

- (i) Pour tout $x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$
- (ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, e^{\ln x} = x$

Propriétés de calcul :

Soient $x > 0$ et $y > 0$ (essentiel !)

- (i) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- (ii) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.
- (iii) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.
- (iv) pour tout $n \in \mathbb{Z}$,
 $\ln(x^n) = n \ln(x)$
- (v) $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$



IV. Fonctions trigonométriques :

1) Définitions :

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) , on appelle **cercle trigonométrique** le cercle de rayon 1 et de centre l'origine du repère.

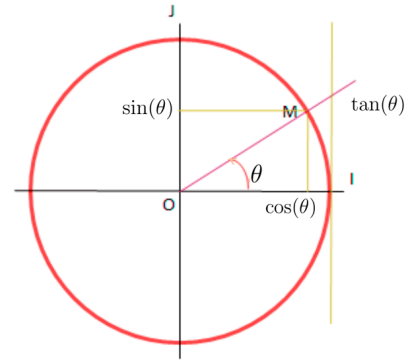
Soit M un point sur le cercle et θ l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.

On appelle **cosinus de θ** , noté $\cos(\theta)$, l'abscisse du point M .

L'ordonnée de M est appelée **sinus de θ** , et est notée $\sin(\theta)$.

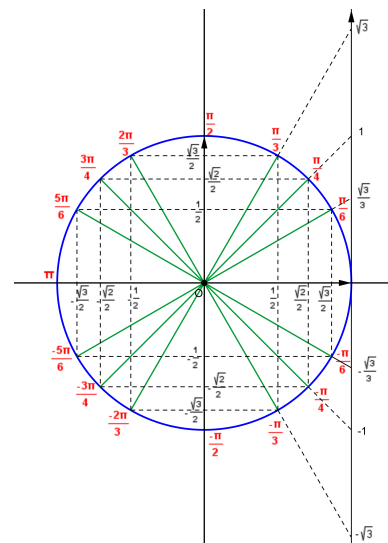
Enfin, pour tout θ tel que $\cos(\theta) \neq 0$, on appelle **tangente de θ** la quantité

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$



2) Valeurs à connaître :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



3) Formules :

Propriétés de calcul :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $\forall a, b \in \mathbb{R},$
 $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
 $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\forall a, b \in \mathbb{R},$
 $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
 $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

Symétrie et parité :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

Dérivabilité et primitives :

Dérivables sur leurs domaines de définition.

Dérivées :

$$(\cos(x))' = -\sin(x),$$

$$(\sin(x))' = \cos(x),$$

$$(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

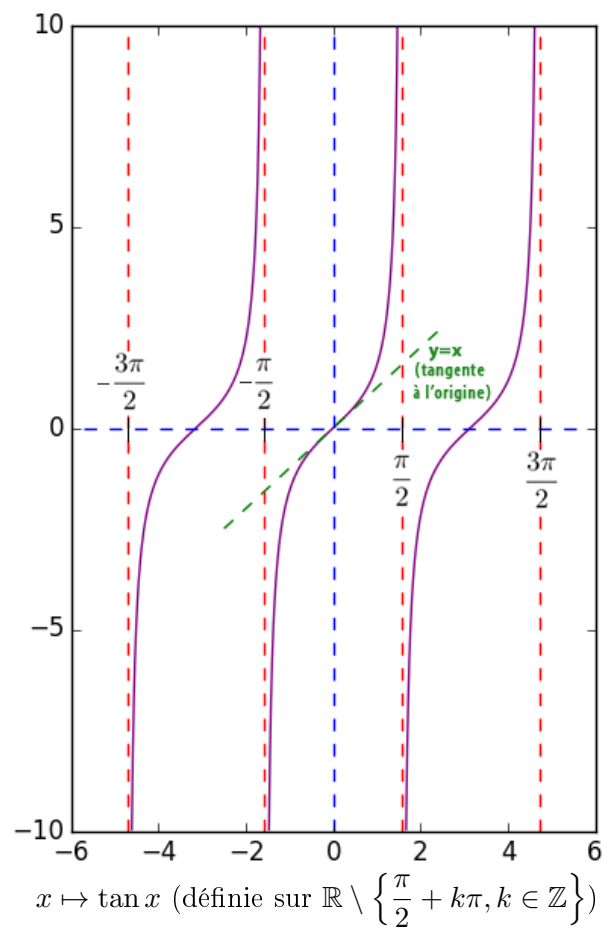
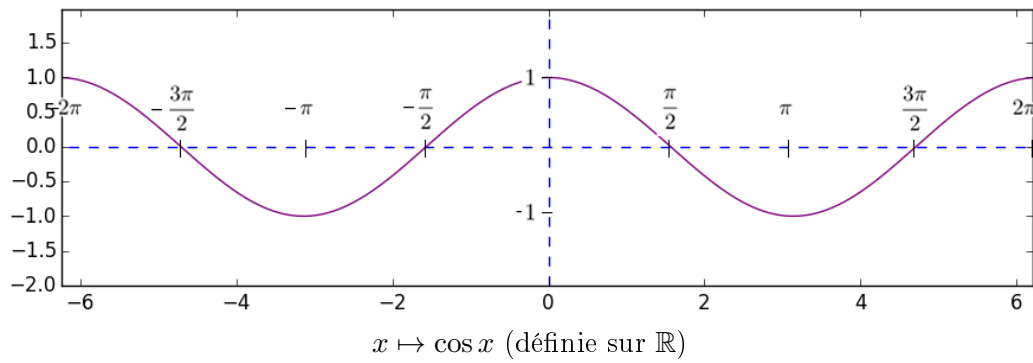
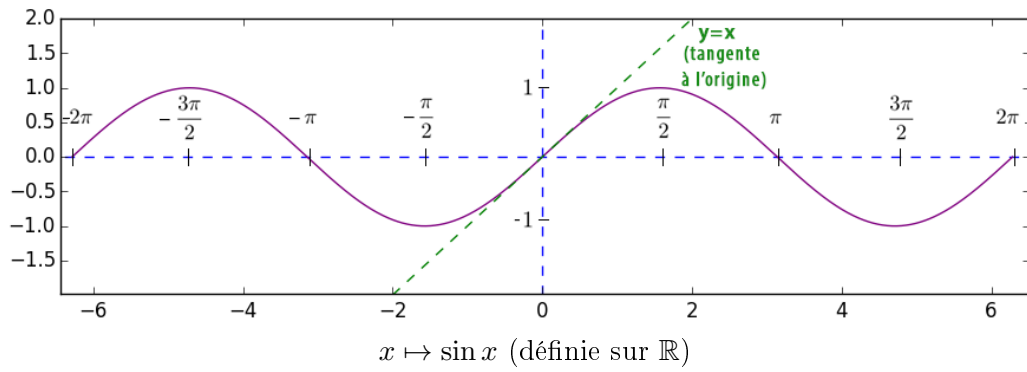
Primitives :

une primitive de $\cos : x \mapsto \sin(x)$.

une primitive de $\sin : x \mapsto -\cos(x)$

une primitive de $\tan : x \mapsto -\ln(|\cos(x)|)$

4) Représentations graphiques :



V. Calcul élémentaire

1) Rappels

a) Fractions



Définition : quotient

Soient a et b deux réels, avec $b \neq 0$.

On appelle **quotient de a par b** , noté $\frac{a}{b}$ le résultat de la division de a par b , c'est à dire le nombre réel qui, multiplié par b , donne a .

Dans la fraction $\frac{a}{b}$, a est appelé _____, et b est appelé _____



Propriété 1 :

On ne change pas la valeur d'une fraction si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur par un même réel non nul : pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}.$$



Propriété 2 :

Pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, et sous réserve d'existence des fractions, on a :

► $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ (**Somme avec dénominateur commun**)

► $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$ (**Réduction au même dénominateur**)

► $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ (**Produit**)

► $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ (**Diviser, c'est multiplier par l'inverse**)

► $\frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$

► $a \times \frac{c}{d} = \frac{a}{1} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{d}$.



Au secours !

ET QUAND IL Y A PLEIN D'ÉTAGES ?

Une situation fréquente est d'avoir des fractions de fractions.

Des écritures comme $\frac{\frac{a}{b}}{c}$, $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$, etc.

Dans ce cas là, la propriété 1 ou la règle "diviser, c'est multiplier par l'inverse" vous aideront à y voir clair ; attention à bien repérer où est la barre de fraction !

b) Puissances entières



Définition : puissance d'un nombre

Soit n un entier strictement positif et a un réel.

- On définit a^n comme le produit de n facteurs tous égaux à a :

$$a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}.$$

En particulier $a^1 = a$.

- Par convention $a^0 = 1$.

- Si a est non nul, alors a^{-n} désigne l'inverse de a^n : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

En particulier, a^{-1} est l'inverse de a : $a^{-1} = \frac{1}{a}$.



Propriété 3 : produit et quotient de puissances

Pour tous réels a et b (avec $b \neq 0$) et pour tous entiers relatifs n et p ,

- $a^n \times a^p = a^{n+p}$

- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

- $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

- $a^n \times b^n = (ab)^n$

- $(a^n)^p = a^{n \times p}$.

c) Priorités calculatoires



Propriété 4 : Règle de calcul, priorités

Pour calculer une expression numérique **sans parenthèses**, on effectue les calculs de la gauche vers la droite, en commençant par les multiplications et les divisions qui ont priorité sur les additions et les soustractions.

Si l'expression **comprend des parenthèses**, on commence par effectuer les calculs à l'intérieur des parenthèses les plus intérieures. On effectue ces calculs en respectant les priorités définies au paragraphe précédent.



Danger !

PARENTHÈSES CACHÉES

- Les puissances sont prioritaires.

Par exemple, si on écrit 2×3^3 , on calcule d'abord 3^3 , puis on multiplie par 2.

Tout se passe comme si 3^3 était entre parenthèses.

Ainsi, $2 \times 3^3 \neq 6^3$

- La barre horizontale des fractions agit comme une parenthèse.

Par exemple $-\frac{a+b}{d} = \frac{-a-b}{d}$: le signe "-" s'est distribué.

2) Identités remarquables

a) Distributivité



Propriété 5 : distributivité

Soient a , b , et c des nombres réels (ou complexes).

Alors

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{et} \quad (a + b)c = ac + bc$$

On dit que le produit est **distributif** sur la somme.

On parle plus précisément de distributivité à gauche pour la première formule, et de distributivité à droite pour la seconde.

Remarques :

- Quand on utilise la propriété de distributivité dans le sens produit vers somme, on dit que l'on **développe** l'expression.
- Quand on utilise l'égalité dans l'autre sens (somme vers produit), on dit que l'on **factorise**.

b) Identités remarquables

On rappelle les formules ci dessous, très importantes pour simplifier des expressions et à maîtriser dans les deux sens (forme factorisée ou développée) :



Propriété 6 : identités remarquables

Soient a et b deux réels (ou complexes). Alors

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Ces formules se généraliseront à des puissances supérieures dans le chapitre consacré aux sommes.

VI. Résolution d'équations élémentaires et de petits systèmes linéaires d'équations

1) Généralités :

a) Vocabulaire :

- On appelle **équation** toute expression (E) dépendant d'une variable x (ou de plusieurs variables notées par exemple $x_1, x_2, \dots, x_n$) et contenant un symbole d'égalité.
La variable x est appelée **inconnue**.
- **Résoudre l'équation** (E) **sur l'ensemble** I signifie trouver tous les x possibles appartenant à I tels que l'expression (E) est vraie. On dit alors que x **vérifie** l'équation (E) ou encore que x est **solution** de (E) .
- Soit (E) et (F) deux équations. On dit que (E) et (F) sont **équivalentes**, et on note $(E) \iff (F)$ si et seulement si (E) et (F) ont les mêmes solutions.
- De par l'utilisation de fonctions dans les équations, il peut y avoir des problèmes d'existence des expressions.

Exemple :

Soit l'équation $(E) : \sqrt{x+2} = x+1$.

Cette équation n'a pas de sens pour tout les x réels, à cause de la racine.

On doit avoir

On parle alors d'**ensemble de définition** de l'équation, qui est donc ici :

- On appelle **ensemble de résolution** l'ensemble sur lequel on résout l'équation. Pour des raisons diverses (cohérence avec un modèle physique, conséquence logique d'une expression, etc.), on peut être amené à chercher des solutions sur des ensembles plus restreints que l'ensemble de définition.

Exemples :

Reprenons $(E) : \sqrt{x+2} = x+1$.

b) Opérations équivalentes :



Méthode :

UTILISATION DES OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Soit (E) une équation à résoudre de la forme $A = B$ (où A et B sont des expressions dépendants éventuellement des inconnues).

Alors on peut :

1. Ajouter à chaque membre le même terme :

Pour n'importe quelle expression C :

$$A = B \iff A + C = B + C$$

2. Multiplier par un même terme non nul :

Si C ne s'annule pas :

$$A = B \iff AC = BC$$

Exemple :

$$(E) : 4x + 3 = 2x - 1$$

$$(F) : \frac{x+1}{x-2} = 2$$

c) Utilisation de la factorisation :



Propriété 7 : Intégrité de $\mathbb{R}$

L'ensemble des nombres réels est *intègre*, c'est à dire que, pour tout réel x et y , on a

$$xy = 0 \iff x = 0 \text{ ou } y = 0$$

On pourra exploiter cette propriété dans la résolution des équations.

Exemple :

$$(G) : 3x \ln(x) = \ln(x)$$

Cas des inégalités :

L'écriture sous forme factorisée est très utile quand on cherche le signe d'une expression. L'utilisation de tableau de signe peut s'avérer très efficace...

Exemples :

$$(H) : \frac{(2x + 3)(x - 1)}{4 - x} \geq 0$$

2) Equations du second degré



Theorème 1 :

Soit a, b et c trois réels avec $a \neq 0$ et soit l'équation $(E) : ax^2 + bx + c = 0$.

Soit P le polynôme défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$.

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$, que l'on appelle **discriminant**. Alors trois cas se présentent :

- si $\Delta < 0$, (E) n'a pas de solution réelle et $P(x)$ est de signe constant (le signe de a)
- $\Delta = 0$, (E) admet une unique solution (dite "racine double") :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$P(x)$ est alors de signe constant (celui de a) et peut se factoriser sous la forme :

$$P(x) = a(x - x_0)^2$$

- $\Delta > 0$, (E) admet deux solutions réelles distinctes, que l'on appelle racines de P :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$P(x)$ est alors du signe de a à l'extérieur des racines, de $-a$ à l'intérieur.

On peut factoriser $P(x)$ sous la forme :

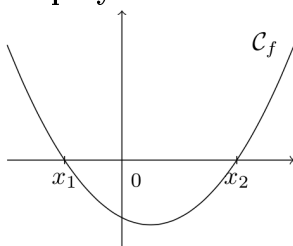
$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

On traitera plus précisément ce résultat dans le chapitre consacré aux polynômes.

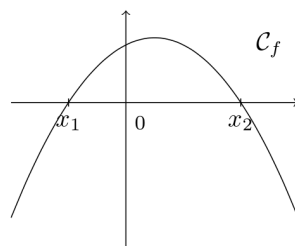
Exemple

$$(E) \quad 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

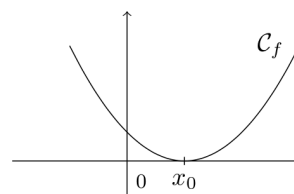
Les propriétés relatives au signe se retiennent bien si on visualise le graphe de la fonction polynôme :



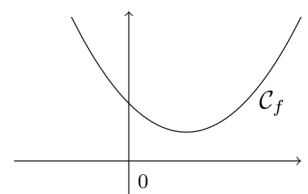
Si $\Delta > 0$ et $a > 0$



Si $\Delta > 0$ et $a < 0$



Si $\Delta = 0$ et $a > 0$



Si $\Delta < 0$ et $a > 0$

On dispose enfin de la propriété ci dessous, très pratique :

**Propriété 8 : Relation entre coefficients et racines**

Soit $ax^2 + bx + c = 0$ une équation du second degré admettant comme solutions x_1 et x_2 (éventuellement égales), alors

(i) $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

(ii) $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

▷ *Preuve* :

Exemple d'utilisation

Soit à résoudre $x^2 + 12x - 13 = 0$.

◁

A retenir : toujours essayer des racines évidentes avant de se lancer dans des Δ ...

3) Systèmes d'équations linéaires

a) Généralités



Définition :

Soit n et p deux entiers naturels. On appelle **système d'équations linéaires** de n équations à p inconnues toutes listes d'équations d'inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ de la forme

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Les coefficients a_{ij} et $b_1, b_2, \dots, b_n$ sont des nombres réels (ou complexes).

Les coefficients $b_1, b_2, \dots, b_n$ constituent ce qu'on appelle le **second membre du système**.

La partie à gauche du signe égal est appelée **premier membre du système**.

Exemples :

$$S_1 : \begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \text{ est linéaire et } S_2 : \begin{cases} 4x^2 + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \text{ n'est pas linéaire.}$$



Danger !

TOUJOURS BIEN RANGER UN SYSTÈME !

Quand on a un système d'équation à résoudre, on veillera à systématiquement le "ranger", avec les inconnues à gauche du signe égal, les constantes à droite.

Les inconnues devront en outre être triées et alignées verticalement.

Exemples :

$$S_3 : \begin{cases} 3x + y = -z \\ z + 2y - 1 = 0 \end{cases} \text{ doit être rangé pour devenir } S_3 : \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ 2y + z = 1 \end{cases}$$



NOTATION

Soit un système rangé, de n équations et p inconnues.

Pour tout $i \leq n$, on note souvent L_i la i -ème ligne.

De la même façon, pour tout $j \leq p$, on note C_j la j -ème colonne.



Définition : système homogène

Un système est dit **homogène** si tous les b_i sont nuls.

Exemples :

$$S_1 : \begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \text{ est homogène et } S_2 : \begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \text{ ne l'est pas.}$$



Définition : système incompatible

Un système est dit **incompatible** si l'ensemble des solutions est vide.

Exemple :

$$S_3 : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -x + 2y = 1 \end{cases} \text{ est incompatible}$$

b) Systèmes étagés :



Définition :

- Un système, avec inconnues rangées, est dit **étagé** (ou *échelonné*) si chaque ligne dont le premier membre est non nul commence strictement plus tard que la ligne précédente dans l'ordre des inconnues.
- Le premier coefficient de chaque ligne non nulle dans un système étagé est appelé **pivot**.
- Le nombre de pivots d'un système étagé (c'est à dire aussi le nombre de lignes non nulles, hors second membre) est appelé **rang**.

Exemples :

Les systèmes ci dessous sont-ils étagés ? si oui, quel est le rang ?

$$S_1 : \begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$S_2 : \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

$$S_3 : \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$S_4 : \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ 2y + z = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$S_5 : \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$S_6 : \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x + y = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$S_7 : \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$S_8 : \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 0 = 2 \end{cases}$$



Proposition 1 :

Le rang d'un système permet de connaître le nombre d'inconnues "en trop", qu'on appelle **inconnues paramètres** ou **inconnues secondaires** : si le système a p inconnues et que le rang est r , on aura $p - r$ inconnues paramètres, qui serviront à exprimer les r autres.



Méthode :

RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME ÉTAGÉ

Un système étagé se résout très facilement (et toujours!) par substitution :

Exemples :

1. Une situation "idéale", où il suffit de substituer du bas vers le haut :

$$\begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ 2y + 2z = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Remarque : un tel système a toujours qu'une seule solution, même si on change le second membre. On dit que c'est un **système de Cramer**.

2. Situation rang plus petit que le nombre d'inconnues :

$$\begin{cases} 4x + y + z = 2 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Le rang est 2, il y a 3 inconnues : il y a alors $3 - 2 = 1$ inconnue qui servira de paramètre.

Pour ne pas risquer de choisir une mauvaise, on part de la dernière ligne, et on choisit l'une des deux. Par défaut, on peut prendre celle tout à droite.

On indique alors que z est quelconque en précisant " $z \in \mathbb{R}$ " et on remplace ensuite dans chaque ligne, en partant du bas :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(1 - z) \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3. Situation d'incompatibilité :

$$\begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ 2z = 2 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

Ce système est étagé de rang 2, mais la dernière ligne est toujours fausse.

Ce système n'a donc pas de solution et alors dit **incompatible**.

c) Méthode de réduction par pivot de Gauss

A noter :

OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

On s'autorise uniquement les opérations suivantes sur les lignes :

- (i) **Permutation** : échanger les lignes i et j . On note cette opération notée " $L_i \leftrightarrow L_j$ ".
- (ii) **Dilatation** : multiplier une ligne par un scalaire non nul. On note : " $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ".
- (iii) **Transvection** : ajouter à L_i une dilatation de L_j , ce qu'on note " $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ".

Les opérations (ii) et (iii) se font souvent simultanément à travers une opération de la forme $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$, avec $\alpha \neq 0$.

Avec ces opérations là, on peut montrer le résultat ci dessous (admis pour le moment)

Theorème 2 :

Tout système d'équations linéaires peut se ramener à un système étagé via des opérations équivalentes.

En outre, le nombre de pivots obtenus par cette méthode ne dépend pas des choix d'opération effectuées : ce nombre est appelé rang du système et est habituellement noté r .

Le rang d'un système est toujours inférieur au nombre d'équations et au nombre d'inconnues.

La preuve de la possibilité de réduire le système provient de l'algorithme ci dessous, et c'est ce qu'on fera concrètement :

Méthode :

RÉDUCTION D'UN SYSTÈME PAR PIVOT DE GAUSS

Avant toute chose, on range le système, puis on suit l'algorithme ci dessous :

1. On "trie" les lignes du système de manière à mettre en L_1 une ligne qui commence par la première inconnue.
2. On utilise la ligne L_1 pour "supprimer" la première inconnue dans les autres lignes, de la manière suivante :
Pour chaque ligne L_i avec $i > 1$, on cherche des coefficients a et b , avec $a \neq 0$ tels que l'opération $aL_i + bL_1$ fait disparaître la première inconnue.
3. **On ne touche plus jamais L_1** et on recommence les étapes 1 et 2 en utilisant cette fois la ligne L_2 qui n'a plus de première inconnue.
On va alors supprimer la deuxième inconnue dans les lignes au dessus de 2, puis on continue avec L_3 et la troisième inconnue (sans toucher ni la ligne L_1 , ni L_2) et ainsi de suite....

l'algorithme s'arrête quand on arrive à la dernière ligne ou inconnue.

On dit qu'on a alors "réduit" le système via le pivot de Gauss.

Remarque : à chaque étape, il est d'usage d'indiquer sous le signe équivalent l'opération effectuée.

Exemples :

$$\begin{cases} x + 2y &= 1 \\ -2x + y &= 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z &= 1 \\ -2x + y - z &= 4 \\ 3x + 5y + 2z &= 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z &= 1 \\ -2x + y - z &= 4 \\ x + 7y + 2z &= 7 \end{cases}$$