

Chapitre 1

Outils pour l'étude de fonctions

Rappels et compléments



Contenu :

I.	Généralités sur les fonctions	3
1)	Vocabulaire	3
a)	Définition	3
b)	Parité, périodicité	4
2)	Opérations et fonctions	5
a)	Construction :	5
b)	Effet sur la représentation graphique	5
3)	Fonctions et inégalités	7
a)	Monotonie	7
b)	Fonctions majorées, minorées ou bornées	9
c)	Extremum de fonctions	10
II.	Dérivation :	10
1)	Définition	10
a)	“Rappels” sur les limites	10
b)	Rappels sur la continuité :	10
c)	Dérivation	12
2)	Interprétations de la dérivation :	13
a)	Taux d’accroissement :	13
b)	En physique/chimie :	13
c)	Interprétation graphique et tangente :	14
3)	Opération sur les dérivées : formulaire	15
a)	Combinaisons linéaires :	15
b)	Produit et quotient de fonctions dérivables	15
c)	Composition de fonctions dérivables	15
4)	Dérivée de la bijection réciproque :	16
a)	Bijection (cf chapitre 2 d’algèbre) :	16
b)	Dérivation de la réciproque	16
c)	Exemple : dérivée d’exponentielle	17
III.	Dérivation et étude de fonctions :	17
1)	Dérivée et tableau de variation	17
a)	Monotonie :	17
b)	Tableau de variation :	18
c)	Tracé de la courbe	18
2)	Dérivées partielles	19
a)	Fonctions de deux variables	19
b)	Applications partielles	19
c)	Dérivées partielles	20

I. Généralités sur les fonctions

1) Vocabulaire

a) Définition



Définition : fonctions

On appelle **fonction** tout objet mathématique qui à un élément x appartenant à un ensemble de départ E associe un élément appelé **image**, appartenant à un ensemble d'arrivée F .

Si la fonction s'appelle f , on note $f(x)$ l'image de x par f .

Si f est définie sur un ensemble E avec des images dans un ensemble F , on utilise la notation suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

On dit alors que f est **à valeur dans F** .

Exemple :

La fonction $\cos$ est définie sur $\mathbb{R}$ et est à valeur dans $[-1, 1]$.

Représentation graphique :

On suppose qu'on travaille dans le plan, muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

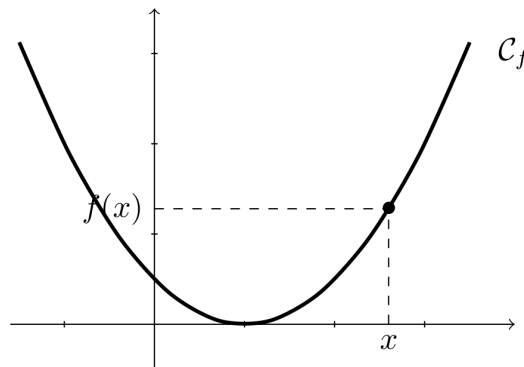


Définition : courbe représentative

Soit f une fonction définie sur un ensemble D à valeur dans $\mathbb{R}$. On appelle **courbe représentative de f** (ou **graphe** de f) l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ où $x \in D$.

On note fréquemment $\mathcal{C}_f$ cette courbe et on peut écrire

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)), x \in D\} \text{ ou encore } \mathcal{C}_f = \{(x, y), y = f(x)\}$$



b) Parité, périodicité



Définition : fonction paire, fonction impaire

Soit f une fonction définie sur un ensemble D avec D symétrique (c'est à dire : si $x \in D$, alors $-x \in D$).

On dit que f est **paire** si $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$.

On dit qu'elle est **impaire** si $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$.

Exemples :

Les fonction suivantes sont paires :

Celles-ci sont impaires :

Et on peut être ni l'un ni l'autre :

Interprétation graphique :

Si f est paire, alors son graphe est

Si f est impaire, alors son graphe est



Définition : fonction périodique

Soit f une fonction définie sur un ensemble D .

On dit que f est **périodique** si et seulement si il existe $T > 0$ tel que pour tout $x \in D$,

$$x + T \in D \text{ et } f(x + T) = f(x)$$

on dit alors que T est une **période** de f et que f est T -périodique.

Exemples :



Méthode :

EXPLOITER LA PARITÉ OU LA PÉRIODICITÉ

Si une fonction a des propriétés de parités ou de périodicité, travailler sur des restrictions de la fonction peut gagner du temps :

- ▶ Si f est paire ou impaire : on étudiera sur $D \cap [0, +\infty[$, et on déduit la partie négative par symétrie.
- ▶ si f est périodique de période T , on étudiera sur un intervalle de la forme $[a, a+T]$, et on déduit le comportement sur D .
- ▶ si f est à la fois paire ou impaire, et T -périodique, on peut alors travailler sur un intervalle de la forme $\left[0, \frac{T}{2}\right]$...

2) Opérations et fonctions

a) Construction :



Définition : somme, produit et quotient de fonctions

Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble D à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On définit :

- ▶ $f + g$ comme étant la fonction définie sur D par $x \mapsto f(x) + g(x)$
- ▶ fg comme étant la fonction définie sur D par $x \mapsto f(x)g(x)$
- ▶ $\frac{f}{g}$ comme étant la fonction définie là où g ne s'annule pas par $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$

On rappelle en outre la notion de composée :



Définition : composition de fonctions

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. On appelle **composée** de g par f et on note $g \circ f$ (lire g rond f) la fonction définie par

$$g \circ f : x \mapsto g \circ f(x) = g(f(x))$$

Son ensemble de définition est

$$\mathcal{D}_{g \circ f} = \{x \in A; f(x) \in B\}.$$

Schématiquement :

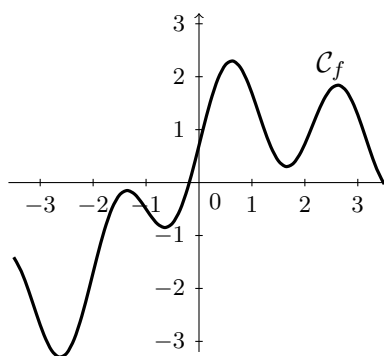
$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x)) = g \circ f(x).$$

$g \circ f$

b) Effet sur la représentation graphique

Anticiper l'effet d'une opération sur le graphe d'une fonction est très important pour juger de la cohérence d'un résultat.

Supposons que le graphe de la fonction d'origine soit donné par :



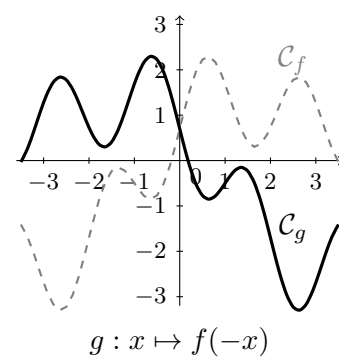
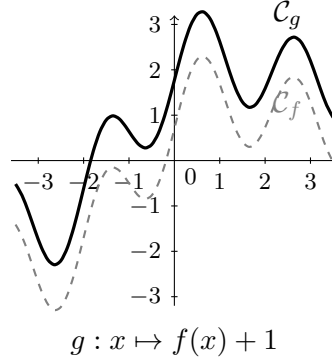
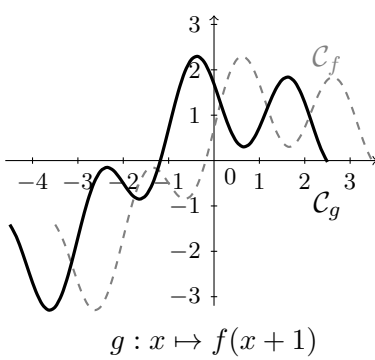
Et voyons l'effet de transformations fréquemment effectuées sur les fonctions....



Propriété 1 :

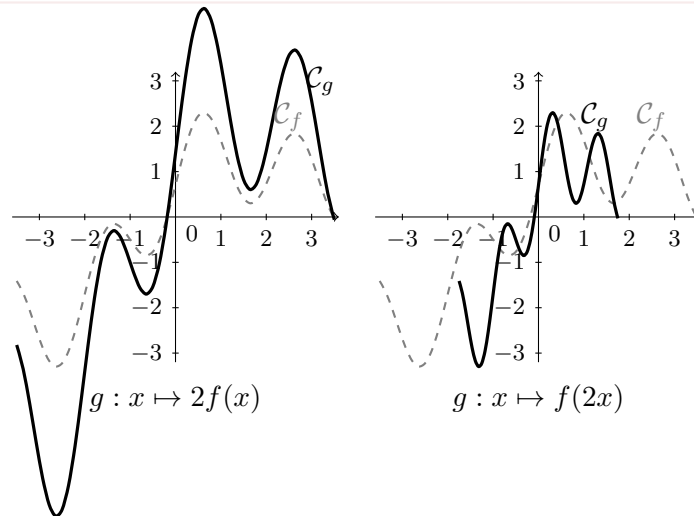
Soit f une fonction réelle dont la courbe représentative est notée $\mathcal{C}_f$.

- La courbe de la fonction $g : x \mapsto f(x + a)$ est l'image de la courbe $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $(-a; 0)$ (décalage sur l'axe des abscisses) ;
- La courbe de la fonction $g : x \mapsto f(x) + b$ est l'image de la courbe $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $(0; b)$ (décalage sur l'axe des ordonnées) ;
- La courbe de la fonction $g : x \mapsto f(-x)$ est l'image de la courbe $\mathcal{C}_f$ par la symétrie d'axe (Oy) .

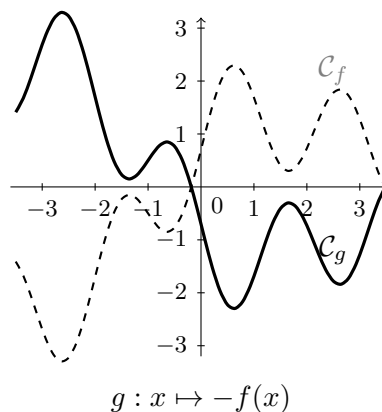


Propriété 2 :

- La courbe de la fonction $g : x \mapsto bf(x)$ est l'image de la courbe $\mathcal{C}_f$ par l'affinité d'axe (Ox) et de rapport b (la distance des points à l'axe des abscisses est multipliée par b : la courbe est étirée ou compressée verticalement).
- La courbe de la fonction $g : x \mapsto f(ax)$ est l'image de la courbe $\mathcal{C}_f$ par l'affinité d'axe (Oy) et de rapport $\frac{1}{a}$ (la distance des points à l'axe des ordonnées est multipliée par b : la courbe est étirée ou compressée horizontalement).



En particulier, la courbe de la fonction $g : x \mapsto -f(x)$ est l'image de la courbe $\mathcal{C}_f$ par la symétrie d'axe (Ox) .



3) Fonctions et inégalités

a) Monotonie



Définition : croissance et décroissance

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- f est dite **croissante** sur D si et seulement si

On dit qu'elle est **strictement croissante** sur D si et seulement si

- f est dite **décroissante** sur D si et seulement si

On dit qu'elle est **strictement décroissante** sur D si et seulement si

- f est dite **monotone** (resp. **strictement monotone**) sur D si et seulement si elle est croissante (resp. strictement croissante) sur D ou décroissante (resp. strictement décroissante) sur D .

Exemples :

- $f : x \mapsto \exp(x)$ est

- $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

- $f : x \mapsto \cos(x)$

Une fonction en plus à connaître : la partie entière



Définition : partie entière

■ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle **partie entière** de x , notée $\lfloor x \rfloor$, l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.
Par exemple : $\lfloor 2,3 \rfloor =$ et $\lfloor -3,1 \rfloor =$



Propriété 3 :

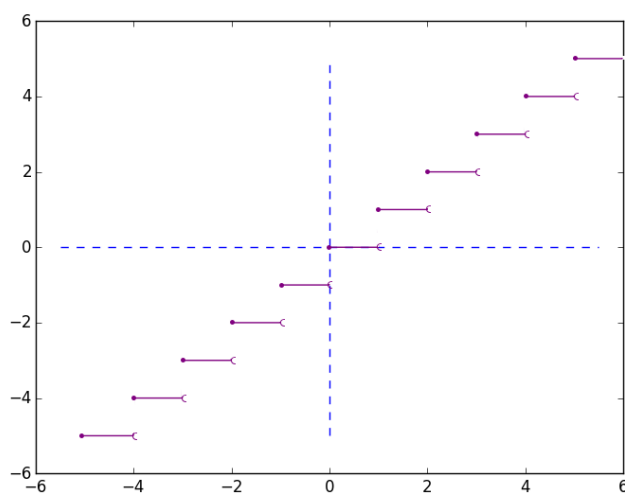


La fonction partie entière est croissante, mais pas strictement croissante.

▷ *Preuve* :

◁

Représentation graphique :



b) Fonctions majorées, minorées ou bornées



Définition : fonction majorée ou minorée

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que

- ▶ On dit qu'une fonction f est **majorée** si et seulement si

- ▶ f est dite **minorée** si et seulement si

- ▶ On dit que f est **bornée** si et seulement si

Exemples :

- ▶ les fonctions suivantes sont majorées :
- ▶ celles-ci sont minorées :
- ▶ bornées :
- ▶ ni l'une ni l'autre :



Propriété 4 :

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. f est minorée si et seulement si $-f$ est majorée.
2. f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

▷ *Preuve* :

c) Extremum de fonctions



Définition : minimum et maximum

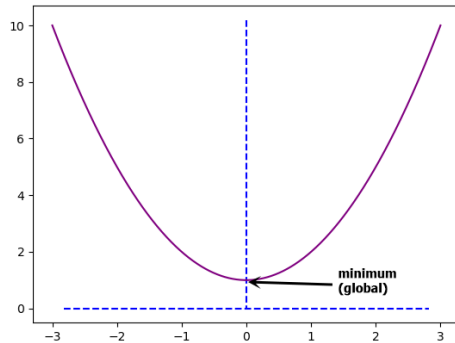
Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $c \in I$.

On dit que f admet un minimum (resp un maximum) au point c si et seulement si $\forall x \in I, f(x) \geq f(c)$ (resp. $f(x) \leq f(c)$).

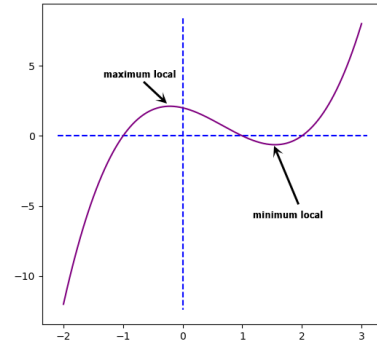
On parle de minimum local (resp maximum local) au point c si au voisinage de c (c'est à dire sur un intervalle autour de c), $f(c)$ est un minimum (resp maximum).

Exemples :

► $f(x) = x^2 + 1$, minimum (global) en $x = 0$.



► $f(x) = (x - 2)(x - 1)(x + 1)$: un minimum local et un maximum local



II. Dérivation :

1) Définition

a) “Rappels” sur les limites

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I . Soit $a \in I$.

Intuitivement, on dit que f admet une limite ℓ en a , si et seulement si $f(x)$ peut approcher ℓ autant qu'on veut lorsque x approche a . Ce qui donne formellement :

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ il existe } \alpha > 0 \text{ tel que, si } \underbrace{|x - a| \leq \alpha}_{\text{“en s'approchant de } a\text{”}}, \text{ alors } \underbrace{|f(x) - \ell| \leq \varepsilon}_{\text{“on s'approche de } \ell\text{”}}.$$

Le " $\forall \varepsilon$ " traduit le “autant qu'on veut”.

b) Rappels sur la continuité :



Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I . Soit $a \in I$. On dit que f est continue en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Exemples :

- La plupart des fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition.
- La fonction partie entière n'est pas continue sur les entiers.

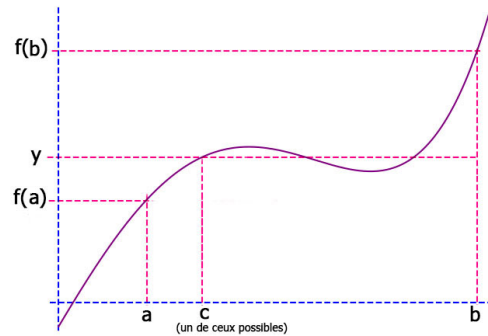
Concrètement, une fonction continue est une fonction qui n'a pas "de trous", ce qui se traduit via le résultat suivant (qu'on démontrera au second semestre) :



Théorème 1 : Théorème des valeurs intermédiaires

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors pour tout réel y entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins un) c dans l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(c) = y$

Ce théorème se généralise facilement au cas où a ou b sont infinis en remplaçant $f(a)$ et $f(b)$ par les limites de f en a et en b .



Exemple d'utilisation : recherche de zéro par dichotomie.

c) Dérivation



Définition : dérivabilité en un point

Soit $I \subset \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en un point $x_0 \in I$ si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe et est finie.}$$

On note alors cette limite $f'(x_0)$ ou encore $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Remarques :

- En effectuant le changement de variable $x = x_0 + h$ on obtient une définition équivalente :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- On dit qu'une fonction est dérivable sur un ensemble I si et seulement si elle est dérivable en tout point $x_0 \in I$. On note alors f' la fonction dérivée de f .
- Le lien continuité/dérivabilité se fait avec le théorème suivant, que l'on démontrera ultérieurement :



Theorème 2 :

Si f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 .

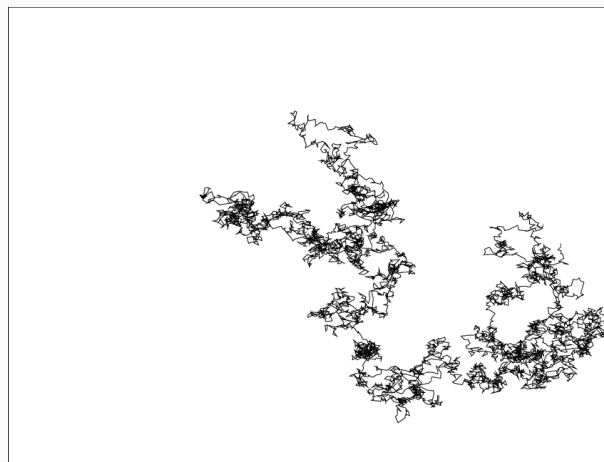
ATTENTION : la réciproque est fausse : ce n'est pas parce que f est continue qu'elle est dérivable...



Le saviez-vous ? UN EXEMPLE DE FONCTION CONTINUE NULLE PART DÉRIVABLE

Il existe des fonctions continues sur leur ensemble de définition, mais dérivable nulle part.

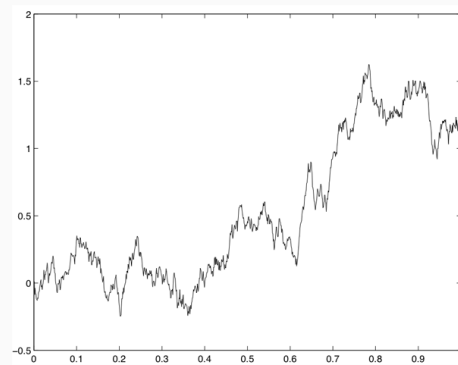
L'un des plus connues est appelée "mouvement brownien", découverte par le botaniste Robert Brown au début du 19e siècle, en observant au microscope le mouvement d'un grain de pollen dans l'eau.



trajectoire d'un mouvement brownien dans le plan

En 1905, Albert Einstein, dans un de ses trois articles de thèse, a montré que ce mouvement aléatoire est dû au choc des molécules d'eau sur le grain de pollen, mais c'est à Louis Bachelier en 1901 que l'on doit la première description mathématique du phénomène.

Réduit à une seule dimension, le mouvement brownien devient une fonction :



exemple de mouvement brownien en tant que fonction

Louis Bachelier en a fait une description probabiliste, en utilisant ce qu'on appelle la "loi normale". Il a montré qu'elle est continue, mais nulle part dérivable... et surtout la ressemblance avec les courbes de la Bourse lui est apparu évidente !

Il l'a utilisé alors avec succès pour des modèles financiers, créant de fait une toute nouvelle branche des mathématiques : les mathématiques financières.

Louis Bachelier a enseigné à Besançon de 1927 à 1937.

2) Interprétations de la dérivation :

a) Taux d'accroissement :



Définition : Taux d'accroissement

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On appelle **taux d'accroissement** de f en x_0 la fonction

$$T_{x_0} : h \mapsto \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Le taux d'accroissement $T_{x_0}(h)$ peut être vu comme la "vitesse" de variation de f pendant la durée h :

- La différence $f(x_0 + h) - f(x_0)$ donne la variation de f entre les instants x_0 et $x_0 + h$.
- La division par h correspond au temps passé entre $x_0 + h$ et x_0 .

On obtient donc bien la vitesse moyenne de variation de f entre x_0 et $x_0 + h$.

La limite (donc la dérivée) correspond ainsi à la vitesse instantanée.

b) En physique/chimie :

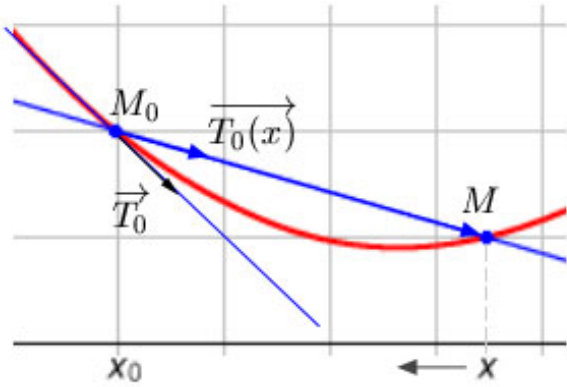
La notation $f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$ provient directement de cette idée d'accroissement.

Le "d" provient du terme "différentiel". Il signifie qu'on regarde une différence, sous entendue très petite. Ainsi, $df(x)$ signifie qu'on regarde $f(x + h) - f(x)$ pour h très petit.

De même, dx veut dire qu'on fait une très petite différence autour de x : c'est en fait la différence entre $x + h$ et x .

La notation physicienne, $\frac{df}{dx}$ est donc un résumé de la formule : petite variation de f sur petite variation de x

c) Interprétation graphique et tangente :



Considérons le déplacement sur la courbe de la fonction f entre les instants x et x_0 . Ceci est donné par le vecteur

$$\overrightarrow{M_0 M} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ f(x) - f(x_0) \end{pmatrix}.$$

Ramenons le en terme d'unité de temps, pour obtenir un vecteur vitesse :

$$\text{On obtient } \overrightarrow{T_0(x)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{pmatrix}.$$

Si f est dérivable, $\overrightarrow{T_0(x)}$ tend lorsque $x \rightarrow x_0$ vers un vecteur limite : $\overrightarrow{T_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$.

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{T_0(x)}$ prend une position limite, qui va être le vecteur directeur de la tangente à la courbe de f au point M_0 . On peut alors donner l'équation cartésienne de cette tangente :

⚙ **Proposition 1 : Equation de la tangente à la courbe de f en un point**

Soit f dérivable en un point a . Alors la courbe représentative de f admet une tangente au point $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$ dont une équation cartésienne est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

A noter qu'il est possible que f ne soit pas dérivable, mais admette une tangente tout de même :

⚙ **Proposition 2 : cas d'une tangente verticale**

Soit f une fonction définie en un point x_0 et soit T_{x_0} son taux d'accroissement en x_0 .

Si $\lim_{h \rightarrow 0} T_{x_0}(h) = +\infty$ ou $-\infty$, alors la courbe de f admet une tangente verticale au point x_0 , dont une équation cartésienne est

$$x = x_0$$

Exemple :

soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

3) Opération sur les dérivées : formulaire

Nous prouverons les résultats de cette section plus tard dans l'année

a) Combinaisons linéaires :

Vocabulaire : si f et g sont deux fonctions, on appelle **combinaison linéaire** de f et g toute fonction de la forme $\lambda f + \mu g$ où λ et μ sont des réels.

⚙ Proposition 3 :

Soient f et g deux fonctions dérivables en un point a . Alors $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable au point a et :

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$$

On dit que l'opération de dérivation est une application linéaire sur l'espace des fonctions dérivables...

b) Produit et quotient de fonctions dérivables

⚙ Proposition 4 :

Soient u et v deux fonctions dérivables en a , alors $u \times v$ est dérivable en a avec

$$(u \times v)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$$

En abrégé :

$$(uv)' = u'v + uv'$$

⚙ Proposition 5 :

Soient u et v deux fonctions dérivables en a avec $v(a) \neq 0$, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable en a et on a

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(a) = \frac{u'(a)v(a) - u(a)v'(a)}{v(a)^2}$$

En abrégé :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

c) Composition de fonctions dérivables

⚙ Proposition 6 :

Soit $u : E \rightarrow F$ et $f : F \rightarrow G$ telles que u est dérivable en $a \in E$ et f dérivable en $u(a)$. Alors $f \circ u$ est dérivable en a et on a

$$(f \circ u)'(a) = u'(a)f'(u(a))$$

En abrégé :

$$(f(u))' = u' \times f'(u)$$

Remarque :

L'idée est que lorsque l'on dérive $f \circ u$, il ne suffit pas de regarder la pente de f , mais également prendre en compte celle de u (d'où la multiplication par u')

Exemples :

$f(x) = e^{\cos(x)}$ se dérive en

$f(x) = \ln(3x^2 + x + 1)$ a pour dérivée

Quelques formules de compositions pratiques à retenir :



FORMULAIRE

DÉRIVÉE DE COMPOSITION

Soit u une fonction dérivable. Sous réserve de définition et d'existence des dérivées des fonctions considérées :

$$1. \text{ Pour tout } n \in \mathbb{Z}, \\ (u^n)' = nu^{n-1}u'$$

$$2. \left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$$

$$3. (e^u)' = u'e^u$$

$$4. (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$5. (\sin u)' = u' \cos(u)$$

$$6. (\cos u)' = -u' \sin(u)$$

$$7. (\tan u)' = u'(1 + \tan^2(u)) = \frac{u'}{\cos^2(u)}$$

4) Dérivée de la bijection réciproque :

a) Bijection (cf chapitre 2 d'algèbre) :

Une application $f : E \rightarrow F$ est dite bijective si et seulement si tout élément de F admet un unique antécédent.

Autrement dit :

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E \text{ tel que } f(x) = y$$

On note alors f^{-1} l'application définie sur F à valeur dans E qui à tout y de F associe l'unique $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Ainsi

$$\forall x \in F, f \circ f^{-1}(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in E, f^{-1} \circ f(x) = x$$

Exemples :

► $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ et $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$ et pour tout $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.

► $x \mapsto \sqrt{x}$ est la bijection réciproque de $x \mapsto x^2$ vue comme fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

b) Dérivation de la réciproque



Proposition 7 :

Soit f une fonction bijective d'un intervalle I dans un intervalle J , et soit $f^{-1} : J \rightarrow I$ sa bijection réciproque.

Si f est dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(a)$ et on a

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y_0)}$$

En abrégé :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

► *Preuve* : On admet pour le moment....

◀

Remarque :

Si $f'(a) = 0$, la limite du taux d'accroissement de f^{-1} vaut $\pm\infty$ ou n'existe pas. Ainsi, f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$.

On peut deviner cette condition graphiquement :

c) Exemple : dérivée d'exponentielle

III. Dérivation et étude de fonctions :

1) Dérivée et tableau de variation

a) Monotonie :

L'étude de la dérivée est un outil efficace pour étudier la monotonie d'une fonction grâce aux résultats ci dessous, dont les démonstrations seront faites au second semestre.



Theorème 3 :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ (ou éventuellement infinis) avec $a < b$.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors

1. f est croissante sur $[a, b]$ si et seulement si $\forall x \in]a, b[, f'(x) \geq 0$.
2. f est décroissante sur $[a, b]$ si et seulement si $\forall x \in]a, b[, f'(x) \leq 0$.
3. f est constante sur $[a, b]$ si et seulement si $\forall x \in]a, b[, f'(x) = 0$.



Theorème 4 :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable en sur $]a, b[$ avec $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$ **sauf éventuellement en un nombre fini de points**.

Alors f est strictement croissante sur $[a, b]$.



A noter :

ATTENTION AUX BORDS

1. Il est important dans ces théorèmes de voir que f n'a pas besoin d'être dérivable aux bornes de l'intervalle considéré. C'est utile pour dire par exemple que la fonction $\sqrt{\cdot}$ est croissante à partir de l'étude de sa dérivée : elle n'est pas dérivable en 0, mais ce n'est pas grave : $\sqrt{\cdot}$ est bien croissante sur $[0, +\infty[$ car sa dérivée est ≥ 0 sur $]0, +\infty[$.
2. La version pour la stricte monotonie peut paraître surprenante aussi : il peut y avoir des moments où la dérivée s'annule (voire même n'existe pas!), mais tant que c'est ponctuel, cela ne crée pas de palier comme dans la partie entière, et la fonction reste strictement croissante.

b) Tableau de variation :

Il est fréquent de représenter dans un tableau les variations d'une fonction, en indiquant intervalle par intervalle le signe de la dérivée pour en déduire les variations. Un tableau de variation est souvent considéré complet quand il y a en outre les limites aux bornes de l'ensemble de définition, mais cela n'est pas obligatoire.

Exemple :

$$\text{Soit } f : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$$

c) Tracé de la courbe



Méthode :

COMMENT BIEN TRACER UNE COURBE

Soit f une fonction étudiée sur un domaine D .

- **Etape 1 :** Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité, puis dresser un tableau de variation.
- **Etape 2 :** Compléter le tableau avec les limites
- **Etape 3 :** Repérer et placer les points remarquables :
 - Les points où f admet un extremum
 - Les points où la dérivée s'annule
 - Eventuellement le moment où f s'annule
 - Eventuellement l'ordonnée à l'origine
 - Eventuellement quand la dérivée vaut 1 ou -1
- **Etape 4 :** Tracer les droites remarquables :
 - Les asymptotes verticales quand la limite en un point est infinie
 - Les asymptotes horizontales quand les limites à l'infinie sont finies
 - Les tangentes horizontales quand la dérivée vaut 0
 - Les tangentes verticales quand le taux d'accroissement tends vers $+\infty$.
 - Eventuellement les tangentes à 45° quand la dérivée vaut 1 ou -1 .
 - Eventuellement les asymptotes obliques.
- **Etape 5 :** Tracer $\mathcal{C}_f$ en exploitant tout ce qu'on a repéré précédemment.

Exemple :

Traçons maintenant le graphe de $f : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$

2) Dérivées partielles

a) Fonctions de deux variables



Définition :

On appelle **fonction de 2 variables réelles** toute application f définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ et à valeur dans $\mathbb{R}$. on a alors

$$f : \begin{cases} D & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto f(x, y) \end{cases}$$

Exemples :

1. $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est une fonction de deux variables, définie sur

L'image de $(2, 3)$ est

2. On souhaite déterminer le domaine de définition de $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{x + 2y + 1}$

b) Applications partielles



Définition : applications partielles

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de 2 variables.

Soit $M = (a, b)$ un point de D .

On appelle **première application partielle au point M** la fonction

$$f_1 : x \mapsto f(x, b)$$

On appelle **deuxième application partielle au point M** la fonction

$$f_2 : y \mapsto f(a, y)$$

Exemples

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^3$. Soit $M = (2, -1)$.

La première application partielle de f en M est la fonction

$$f_1 : x \mapsto$$

La deuxième est la fonction

$$f_2 : y \mapsto$$

La première application partielle de f au point $(0, 0)$ est

$$f_1 : x \mapsto$$

c) Dérivées partielles



Définition : dérivées partielles

- Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de 2 variables.
Soit $M = (a, b)$ un point de D , et soient f_1 et f_2 les applications partielles en M .
Si f_1 est dérivable en a , on dit que f admet une **dérivée partielle par rapport à la 1-ère variable en M** , et, au lieu de $f'_1(a)$, on note la dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$.
Autrement dit, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = f'_1(a)$
De même, on pose $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = f'_2(b)$ la **dérivée partielle par rapport à la seconde variable**.
- Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Si f admet des dérivées partielles en tout point $M = (x, y)$ du domaine, on définit alors les applications dérivées partielles sur D par

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} : (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$



Au secours !

En pratique, il suffit de penser les autres variables comme "fixées".

Si on dérive par rapport à x , y est vue comme constante. Si on dérive par rapport à y , c'est x qui est constante. De même s'il y a d'autres variables impliquées.

Une astuce pour s'obliger à dériver par rapport à y par exemple, c'est de rajouter un indice 0 à x .

Par exemple : on veut dériver $f(x, y) = \cos(xy) + x$ par rapport à y . On écrit $\cos(x_0y) + x_0$, et ainsi, on a moins envie de remplacer x par 1 quand on dérive ...

Exemples :

Les dérivées partielles de $f : (x, y) \mapsto x + \cos(y)$ sont données par :

Les dérivées partielles $f : (x, y) \mapsto e^{xy^2}$ sont :

Autotest :

- ☐ Qu'est ce qu'une fonction paire ? impaire ? majorée ? minorée ? bornée ?
- ☐ Énoncez le théorème des valeurs intermédiaires.
- ☐ Qu'est-ce que la recherche par dichotomie ?
- ☐ Quelles sont les effets des opérations $f(x+a)$, $f(x)+a$, $f(ax)$, $af(x)$, etc. sur le graphe d'une fonction f ?
- ☐ Qu'est-ce qu'une fonction croissante ? Décroissante ? Strictement croissante ? Monotone ?
- ☐ Qu'est ce que la dérivée d'une fonction en un point ? Quelles interprétations à cette dérivée ?
- ☐ Donner la formule de dérivation du produit, du quotient, de la composition de fonctions dérivables.
- ☐ Donner la formule de dérivation de la bijection réciproque, en précisant bien les conditions d'utilisation.
- ☐ Qu'est ce qu'une fonction de deux variables ? Qu'est ce que les dérivées partielles ?