

Chapitre 1

Formalisme et notations

langage mathématique et rudiments de logique



Contenu :

I.	Eléments de logique	3
1)	Propositions logiques, quantificateurs	3
a)	Définition	3
b)	Quantificateurs mathématiques	3
2)	Connecteurs logiques :	4
a)	ou (union) :	4
b)	et (intersection) :	4
c)	Négation	4
3)	Implications, équivalences, etc.	6
a)	Implication	6
b)	Réciproques et équivalence :	7
c)	Contraposée :	8
II.	Techniques de preuve :	9
1)	Preuve par contraposition	9
2)	Disjonction de cas :	10
3)	Le raisonnement par l'absurde :	10
4)	Le raisonnement par récurrence :	11
a)	Récurrence (simple) :	11
b)	Récurrence double :	13
c)	Récurrence forte	14
5)	L'analyse-synthèse :	15

I. Éléments de logique

1) Propositions logiques, quantificateurs

a) Définition



Définition :

On appelle **proposition logique** ou **assertion** toute affirmation qui est sans ambiguïté vraie ou fausse.

Exemples :

- A : "tous les chats sont noirs". C'est une proposition logique. Elle est sans ambiguïté
- B : "si un nombre réel x est tel que $x \geq 1$, alors $x^2 \geq x$ ". Cette proposition est
- C : "la Terre est plate". Cette proposition est

b) Quantificateurs mathématiques



NOTATION

Afin de clarifier les écritures, on utilisera en mathématiques les notations suivantes :

- (i) $\forall$, qui signifie "pour tout" ou "quel que soit",
- (ii) $\exists$, qui signifie "il existe" (sous entendu : "il existe au moins un"),
- (iii) $\exists!$, qui signifie "il existe un unique".

Ces notations sont appelées **quantificateurs universels**.

Une fois qu'une variable est introduite par un quantificateur, on poursuit avec une virgule.

Après l'introduction via $\exists$, cette virgule se lit "tel que".

On trouve aussi parfois une barre oblique pour dire ce "tel que", mais son usage se raréfie au profit de la virgule.

Exemples :

- D : " $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \geq n$ " signifie "pour tout entier naturel n , $n^2 \geq n$ ".
- E : " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$ ". Cette proposition se lit
- F : " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < x$ ". Cette phrase se lit

On pourrait aussi l'écrire avec la barre oblique : " $\exists x \in \mathbb{R}/x^2 < x$ ".



Danger !

⚠ En mathématiques, chaque lettre utilisée **doit être introduite**, soit en français, soit via des quantificateurs.

Par exemple dire juste " $n^2 \geq n$ " n'est pas une proposition logique si on ne précise pas ce qu'est n : il y a une ambiguïté.

⚠ **L'ordre des opérateurs est essentiel !** Chaque lettre introduite peut dépendre des précédentes, mais les premières ne dépendent pas des dernières. Ainsi, les deux phrases suivantes ont des sens très différents

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}, xy = 1$$

$$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^*, xy = 1$$

⚠ On n'utilise **JAMAIS** les quantificateurs comme abréviation au milieu de phrases en français.

2) Connecteurs logiques :

a) ou (union) :



Définition : ou

Soient A et B deux propositions.

La proposition " A ou B " signifie " A est vraie ou B est vraie **ou les deux** sont vraies."

Le "ou" en math sans précision supplémentaire est **toujours inclusif** : c'est toujours un et/ou.

Table de vérité :

A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
A ou B				

b) et (intersection) :



Définition : et

Soient A et B deux propositions.

La proposition " A et B " signifie que " A est vraie et B est vraie" (sous entendu : simultanément).

Table de vérité :

A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
A et B				

c) Négation



Définition : negation

Soit A une proposition. On note $\bar{A}$ (ou on écrit $non A$) la proposition qui est fausse si A est vraie, et qui est vraie si A est fausse. $\bar{A}$ est appelé **négation de A** .

Table de vérité :

A	V	F
non A		

Exemple :

► A : "la Terre est ronde" a pour négation $\bar{A}$:

► B : "tous les chats sont noirs" se nie en $\bar{B}$:



Méthode :

TRAITER LES QUANTIFICATEURS DANS UNE NÉGATION

Lors du passage à la négation d'une assertion contenant des quantificateurs, ceux-ci sont intervertis :

Ainsi, $\forall$ se transforme en $\exists$ et $\exists$ devient $\forall$.

L'ordre d'apparition n'est pas affecté.

Exemple :

► C : " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$ " se nie en $\bar{C}$:

► D : " $\exists x \in \mathcal{D}_f, f(x) \neq 0$ " se nie en $\bar{D}$:

Pour la négation de phrase contenant "ou" et "et", on utilisera le résultat ci dessous :



Proposition 1 : Lois de Morgan

Soient A et B deux propositions, alors :

$$\overline{A \text{ ou } B} = \bar{A} \text{ et } \bar{B}, \quad \overline{A \text{ et } B} = \bar{A} \text{ ou } \bar{B}$$

▷ *Preuve* :

◁

Exemple :

Soit $x \in \mathbb{R}$. La phrase " $x \geq 0$ et $x \leq 1$ " se nie en



Méthode :

UTILISATION DE CONTRES EXEMPLES

En mathématiques, un exemple n'a, a priori, pas valeur de preuve.

Néanmoins, si une phrase affirme qu'une propriété est vraie "pour tout" quelque chose, et qu'on veut prouver qu'en fait elle est fausse, on peut essayer de montrer "qu'il existe" quelque chose qui remet en cause la proposition.

En procédant ainsi, on aura montré que le contraire de la proposition est vraie, donc que celle qu'on avait au départ est fausse.

On parle alors de **contre exemple**.

Exemple :

Dans la phrase C , il est effectivement faux de dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq x$, puisqu'en prenant $x = 0.5$, on a bien $x \in \mathbb{R}$, mais on a $x^2 = 0.25$. Ainsi, $x^2 < x$.

On a donc montré par un contre exemple que la phrase C était fausse... et donc que $\bar{C}$ était vraie !

3) Implications, équivalences, etc.

a) Implication



Définition : implication (définition intuitive)

Soit A et B deux propositions.

On écrit $A \implies B$ si le fait que A soit vraie entraîne forcément que B est vraie à son tour.

Ainsi, l'écriture $A \implies B$ se lit " A implique B ", et signifie donc "si A , alors B ".

Exemples :

- Si x est un réel plus grand que 2, alors $x^2 \geq 4$. On peut donc écrire :

$$x \geq 2 \implies x^2 \geq 4$$

- S'il pleut, il y a des nuages. On peut donc dire

$$\text{il pleut} \implies \text{il y a des nuages}$$

En revanche, il peut y avoir des nuages sans qu'il pleuve. La phrase

$$\text{il y a des nuages} \implies \text{il pleut}$$

est donc fausse.

Pour montrer qu'une implication $A \implies B$ est fausse, il s'agit donc de trouver des moments où A est vraie, mais où B n'est pas forcément vraie. Autrement dit :



Propriété 1 : négation de l'implication

Soit A et B deux propositions,

$$\text{la négation de } A \implies B \text{ est } A \text{ et non } B$$



À noter :

(HORS PROGRAMME)

La négation de $A \implies B$ est " A et non B ", et par la loi de Morgan, la négation de " A et non B " est " $\text{non}A$ ou B ". On en déduit donc une définition formelle de l'implication :

$$A \implies B \text{ est en fait la proposition } \bar{A} \text{ ou } B.$$

Sa table de vérité est donc la suivante :

A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
$A \implies B$	V	F	V	V

Exemple :

avec cette définition, l'implication

$$\text{"la Terre est plate"} \implies \text{"tous les chats sont noirs"}$$

est donc

En pratique :

On utilisera $\implies$ pour dire "si ... alors ...", peu importe la définition formelle compliquée ci dessus :

- Si il pleut, alors il y a des nuages.
- Si la Terre est plate, alors tous les chats sont noirs



Danger !

CE N'EST PAS UNE ABRÉVIATION

L'utilisation de $\implies$ à la place d'un "donc" ou pour dire "on en déduit" dans un raisonnement est impropre : cette double flèche a un sens mathématiques très précis. Il s'agit de relier deux propositions entre elles, mais elle n'a pas de valeur "démonstrative" pour l'une des propositions.

En effet, ce n'est pas parce qu'une implication $A \implies B$ est vraie que B est vraie. Ainsi, la phrase "la Terre est plate" $\implies$ "tous les chats sont noirs" est vraie, mais la phrase "la Terre est plate" donc "tous les chats sont noirs" est fausse, puisque le point de départ est faux...

b) Réciproques et équivalence :



Définition : réciproque

| On appelle **réciproque** de $A \implies B$ la phrase $B \implies A$.

En général, ce n'est pas parce que $A \implies B$ que $B \implies A$.

Exemples :

► Soit $x \in \mathbb{R}$. La phrase ci-dessous est vraie :

$$x \geq 0 \implies x^2 \geq 0$$

La phrase $x^2 \geq 0 \implies x \geq 0$ est

► $|x| = 0 \implies x = 0$ est vraie, et la réciproque $x = 0 \implies |x| = 0$ est



Définition : équivalence

| Dire que deux propositions A et B sont **équivalentes** signifie que $A \implies B$ et $B \implies A$.
On note alors $A \iff B$.

Exemples :

► $|x| = 0 \iff x = 0$

► $x^2 = 1 \iff x = 1 \text{ ou } x = -1$



A noter :

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ET ÉQUIVALENCE

Quand on résout des équations, il sera essentiel de procéder par équivalence, sous peine de perdre des solutions ou d'en avoir en trop.

c) Contraposée :



Définition : contraposée

Soient A et B deux propositions.

On appelle **contraposée** de $A \implies B$ la phrase $\text{non } B \implies \text{non } A$.

Exemples :

► "il pleut $\implies$ il y a des nuages" a pour contraposée :

► " $|x| = 0 \implies x = 0$ " a pour contraposée



Danger !

PIÈGE MORTEL :



Il ne faut pas confondre contraposée et réciproque.

La contraposée d'une implication n'est pas non plus la négation de l'implication !



Theorème 1 :

► $A \implies B$ et sa contraposée $\text{non } B \implies \text{non } A$ ont même signification.

► *Preuve* : On peut utiliser les tables de vérité, ou partir de la traduction formelle :

II. Techniques de preuve :

1) Preuve par contraposition



Méthode :

PREUVE PAR CONTRAPOSITION :

Etant donnée qu'une implication et sa contraposée ont le même sens logique, il peut être utile de passer par la contraposée d'une proposition pour établir une propriété...

Ainsi, si on nous demande "montrer que si on a A , alors on a B ", on peut montrer que "si on n'a pas B , alors on n'a pas A ", ce qui revient en fait au même !

L'action consistant à transformer une implication en sa contraposée s'appelle une **contraposition**.

Exemple :

On veut montrer que si x et y sont deux nombres réels non nuls, alors xy est non nul également.

Autrement dit, on veut montrer

$$x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \implies xy \neq 0$$

2) Disjonction de cas :



Méthode :

DISJONCTION DE CAS :

Pour démontrer la validité d'une assertion, on sera souvent amené à considérer plusieurs situations qui impliqueraient la validité de la proposition.

Si toutes les situations possibles entraînent la validité de l'expression proposée, celle-ci sera donc vraie "dans tous les cas".

On dit qu'on a alors raisonné par **disjonction de cas**.

Exemple :

Montrons que $\frac{n(n+1)}{2}$ est un nombre entier pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

3) Le raisonnement par l'absurde :



Méthode :

LE RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

Si on veut démontrer qu'une proposition A est vraie, on peut procéder par contradiction

1. On suppose que A est fausse (donc que $\bar{A}$ est vraie).
2. On fait des déductions logiques...
3. On arrive à une proposition B manifestement fausse
4. On en conclut que A est vraie

Exemple : le secret des Dieux

Montrons que $\sqrt{2}$ est "irrationnel", c'est à dire que ce n'est pas une fraction.

4) Le raisonnement par récurrence :

a) Récurrence (simple) :



Theorème 2 : Principe de récurrence

Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier n et soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Si :

1. $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
2. Pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

▷ *Preuve* : Il n'y a pas de "vraie preuve" de la récurrence : c'est un axiome. C'est le principe de récurrence qui garantit l'existence même des entiers naturels... ◁

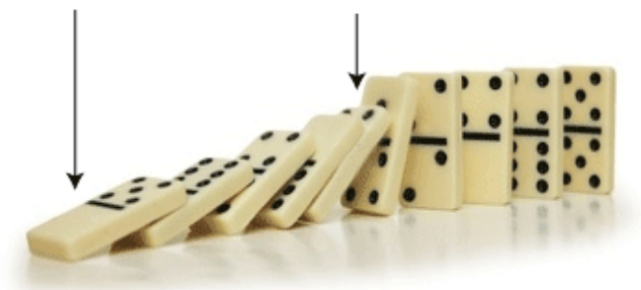
Le principe de récurrence peut être illustré par les dominos :

1. Initialisation :

Le premier domino tombe.

2. Hérédité :

Un domino qui tombe fait tomber le suivant.



3. Conclusion :

Tous les dominos tombent.

Remarque :

Très souvent, on initialise à $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$, mais il ne faudra pas être perturbé si ça commence plus tard...

**Méthode :****PLAN DE RÉDACTION D'UNE RÉCURRENCE SIMPLE**

Une récurrence peut être présentée de la façon suivante :

1. On énonce la proposition à démontrer : "Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : ...".
2. On annonce ce qu'on va faire : "Montrons par récurrence que pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie."
3. On initialise : " $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie : en effet,..."
4. On montre l'hérédité : "Soit un entier $n \geq n_0$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors ... , donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie"
5. On conclut : "d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$."

Exemple :

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) Récurrence double :

La récurrence double est une variante de la récurrence. Elle est utilisée lorsqu'on a besoin des deux étapes précédentes pour déterminer l'étape suivante.



Méthode :

PLAN DE RÉDACTION D'UNE RÉCURRENCE DOUBLE

Une récurrence double peut être présentée de la façon suivante :

1. On énonce la proposition à démontrer : "Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : ...".
2. On annonce ce qu'on va faire : "Montrons par récurrence double que pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie."
3. On initialise : on montre que $\mathcal{P}(n_0)$ que $\mathcal{P}(n_0 + 1)$ est vraie (double initialisation)
4. On montre l'hérédité : "Soit un entier $n \geq n_0$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n + 1)$ sont vraies, alors ... , donc $\mathcal{P}(n + 2)$ est vraie"
5. On conclut : "d'après le principe de récurrence double, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$."

Si on reprend l'analogie des dominos, c'est comme si on avait besoin du poids de deux dominos pour faire chuter le suivant.

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. Montrez que pour tout $n \geq 0$, $u_n = 2^n + (-1)^n$.

Remarque :

On peut tout à fait imaginer une récurrence triple, quadruple, etc... Il faut alors effectuer une triple (ou quadruple, etc...) initialisation et supposer que trois (ou quatre, etc...) étapes sont vraies lorsqu'on montre l'hérédité.

c) Récurrence forte

Version un peu moins fréquente, elle consiste lors de l'hérédité à utiliser tous les pas précédents pour déduire le pas suivant.



Méthode :

PLAN DE RÉDACTION

Un récurrence forte peut être présentée de la façon suivante :

1. On énonce la proposition à démontrer : "Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : ...".
2. On annonce ce qu'on va faire : "Montrons par récurrence forte que pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie."
3. On initialise : on montre que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
4. On montre l'hérédité : "Soit $n \in \mathbb{N} \geq n_0$. Supposons que pour tout entier p tel que $n_0 \leq p \leq n$, $\mathcal{P}(p)$ est vraie, alors ... , alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie"
5. On conclut : "d'après le principe de récurrence forte, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$."

Exemple :

Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est premier ou peut s'écrire comme un produit de nombres premiers.

5) L'analyse-synthèse :

Le raisonnement par "analyse synthèse" est un raisonnement fréquemment utilisé quand on cherche des solutions à une équation, quand on cherche à prouver l'existence de quelque chose, quand on cherche à construire certains objets, etc.



Méthode :

ANALYSE-SYNTHÈSE

Le raisonnement par analyse synthèse se produit en deux phases :

1. Etape d'analyse.

On suppose que le problème est résolu (par exemple : on suppose qu'on a une solution à l'équation). On cherche à aller le plus loin possible sous cette hypothèse, jusqu'à ce qu'on obtienne des conditions qui nous paraissent satisfaisante.

On a alors obtenu des **conditions nécessaires** à la résolution de notre problème.

2. Etape de synthèse.

On vérifie que les conditions nécessaires qu'on a obtenu sont en fait des **conditions suffisantes** : sous les conditions qu'on a trouvé, peut-on résoudre le problème ? Au besoin, on ajoute ou on supprime des conditions.

L'étape de synthèse peut ressembler beaucoup à l'analyse : il s'agit fréquemment de lire l'analyse en sens inverse, pour vérifier que les implications utilisées dans l'étape d'analyse sont en fait des équivalences.

Exemple :



Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[-a, a]$ ou sur $\mathbb{R}$.

On dit que f est paire si pour tout x de son ensemble de définition, $f(-x) = f(x)$.

on dit qu'elle est impaire si pour tout x de son ensemble de définition, $f(-x) = -f(x)$.

Ainsi, $\cos$ est une fonction paire, $\sin$ est une fonction impaire. La fonction $\exp$ n'est ni l'un ni l'autre.

On va montrer par analyse synthèse qu'en fait, **toute fonction peut s'écrire comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.**

Autotest :

- ☐ Qu'est ce que les quantificateurs ?
- ☐ Donner un exemple où l'ordre des quantificateurs change totalement le sens d'une proposition.
- ☐ Qu'appelle-t-on "lois de Morgan" ?
- ☐ Qu'est ce que la négation d'une phrase ?
- ☐ Qu'est ce qu'une implication ? Est-ce pareil que "donc" ?
- ☐ Qu'est-ce que la contraposée d'une implication ? Qu'est ce que la négation d'une implication ?
- ☐ Donner un exemple d'utilisation de la contraposée.
- ☐ Qu'est ce que le raisonnement par l'absurde ?
- ☐ Qu'appelle-t-on raisonnement par analyse synthèse ?
- ☐ Présenter le raisonnement par récurrence. Qu'est ce que la récurrence double ? La forte ?