

## Programme de colle S2

### Conseils pratiques

- À votre arrivée, séparez le tableau en parties égales.  
Si vous collez avec quelqu'un d'autre que votre professeur, écrivez votre nom.
- **Organisez votre partie du tableau en colonnes.**  
**N'écrivez ni trop gros, ni trop petit.**
- Utilisez une partie du tableau comme brouillon.
- Rompez les morceaux de craie neufs pour ne pas les faire crisser.
- **Rédigez, mais succinctement** : les abréviations sont autorisées, n'écrivez pas les justifications immédiates (il y a l'oral pour ça), ne faites pas de longues phrases.
- N'hésitez pas à **faire des schémas** pour illustrer votre démarche.
- **La colle est un exercice oral** : il faut s'exercer à s'exprimer clairement devant un examinateur.

### Structure de la colle

La colle que vous passerez cette semaine sera composée des étapes suivantes :

1. Une ou deux définitions, propriétés ou théorème du cours à restituer.  
*On attend toujours une restitution **rapide** et **précise**.*
2. Un énoncé avec démonstration à refaire, sur le programme de votre choix (poussin / poulet / Super Poulet).  
*Dans l'idéal, en temps raisonnable (vous serez coupés si cela dure trop) et sans aide.*
3. Un calcul d'équivalent ou de développement asymptotique.
4. Ou ou deux exercices sur les séries.

### Notions au programme

- **Révisions de première année** : calcul asymptotique, avec en particulier : équivalents usuels, développements limités usuels, échelle de comparaison des suites ; calcul d'équivalents et de o.
- **Chapitre 1, Séries numériques** : tout sauf §V *Produit de Cauchy* et §VI *Formule de Stirling*.

## Démonstrations à connaître

### Étage 1 / Poussin

- [§I.3] Étude des séries géométriques  $\sum_{n \geq n_0} q^n$  ( $q \in \mathbb{C}$ )
- [§III.1] Nature d'une série à termes positifs
- [§IV.2] Théorème de comparaison par domination

### Étage 2 / Poulet

Le programme Poussin, ainsi que :

- [§II.2] Théorème des séries télescopiques
- [§III.2] Théorème de comparaison par inégalités
- [§III.4] Nature des séries de Riemann

### Étage 3 / Super-Poulet

Les programmes Poussin et Poulet, ainsi que :

- [§III.2] Théorème de comparaison par équivalents
- [§IV.4] Règle de d'Alembert
- [§IV.5] Critère spécial des séries alternées :  
convergence, signe et majoration de la valeur absolue de la somme dans le cas  $\sum_{n \geq 0} u_n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n r_n$  où  $\forall n \geq 0, r_n \geq 0$ .

## Compétences attendues

### Calcul asymptotique

- Connaître les équivalents usuels et les développements limités usuels [→ TDrév1/2 et 11]
- Prouver qu'une suite est équivalente à une constante non nulle [→ TDrév1/3]
- Effectuer un changement de variable dans un équivalent ou un développement asymptotique [→ TDrév1/4]
- Distinguer les suites infiniment petites des suites infiniment grandes et des suites convergeant vers une constante non nulle [→ TDrév1/6]
- Placer des suites sur une échelle de comparaison graphique [→ TDrév1/7]

- Calculer un équivalent en décomposant le problème en blocs indépendants qui se multiplient, se divisent et sont élevés à une puissance fixe [→ **TDrév1/5**]
- Calculer l'équivalent d'une somme en évaluant le poids relatif des termes [→ **TDrév1/8**]
- Montrer qu'une expression  $u_n$  est négligeable devant  $\frac{1}{n^\alpha}$  / que  $\frac{1}{n}$  est négligeable devant  $u_n$  en utilisant la « règle du  $n^\alpha$  » [→ **§IV.2**]

## Séries numériques

- Maîtriser la nature des objets relatifs à l'étude des séries [→ **§I, §II.1**] :

|                             |                                                                    |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| Série                       | $\sum_{n \geq n_0} u_n$                                            |
| Terme général               | $(u_n)_{n \geq n_0}$                                               |
| Terme de rang $n$           | $u_n$                                                              |
| Somme partielle de rang $n$ | $S_n := \sum_{k=n_0}^n u_k$                                        |
| Somme de la série           | $S := \sum_{k=n_0}^{\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ |
| Reste de rang $n$           | $R_n := S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$                      |

- Prouver qu'une série est grossièrement divergente [→ **§I.2, exo 3**]
- Prouver la convergence d'une série en étudiant la limite de ses sommes partielles [→ **exo 1, §II.2, exo 6 Q3**]
- Connaître les séries usuelles : harmonique, géométriques exponentielles, de Riemann [→ **§I.3, §III.4**]
- Envisager un reste de série convergente comme différence entre somme et somme partielle [→ **§II.1/déf.**] ou comme somme d'une série [→ **§II.1/prop.**]; savoir qu'un reste de série convergente tend toujours vers 0.
- Reconnaître une série télescopique; en déduire la nature et la somme éventuelle de la série [→ **§II.2, exo 5**]
- Étudier la limite d'une suite en étudiant la nature de la série télescopique associée [→ **§II.2 (principe), §VI.1 (application)**]
- Utiliser la linéarité de la sommation **soigneusement** pour étudier la nature d'une série et sa somme éventuelle [→ **§II.3, exo 6 et 7**]
- Mobiliser les théorèmes de comparaison pour étudier la nature d'une série; **toujours essayer en premier la comparaison par équivalents** [→ **§IV.3 (bilan), exos 8, 9, 12, 13**]
- Conjecturer une relation de domination pertinente pour prouver la nature d'une série en s'aidant d'une échelle de comparaison graphique

[→ **exos 14, 15**]

- Étudier la nature d'une série à termes positifs en étudiant le caractère majoré ou non de ses sommes partielles [→ **§III.1 (principe), exo 11 Q1 (application)**]
- Prouver qu'une série à termes quelconques est convergente en montrant son absolue convergence [→ **§IV.1, exo 12**]
- Mobiliser la règle de d'Alembert sur les séries appropriées (à termes strictement positifs, à structure multiplicative) pour étudier la nature d'une série [→ **§IV.4, exo 16**]
- Mobiliser la méthode des rectangles (comparaison série/intégrale) afin de déterminer : la nature d'une série, un équivalent de ses sommes partielles en cas de divergence, un équivalent de ses restes en cas de convergence [→ **§III.3, exos 10 et 11**]
- Justifier qu'une série est alternée [→ **§IV.5, exemples sous la déf.**]
- Appliquer le critère spécial des séries alternées (CSSA) en listant correctement les hypothèses [→ **§IV.5**]; mobiliser toutes ses conclusions et pas seulement la convergence de la série [→ **exo 17**].