

Compléments d'algèbre linéaire

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

I Somme de sous-espaces vectoriels

I. A Somme de deux sous-espaces vectoriels (rappels)

Définition 1.1

Soit F et G des sous-espaces vectoriels de E .

- Somme de F et G :

$$F + G = \{x_F + x_G; \text{ avec } x_F \in F, x_G \in G\}.$$

- La somme $F + G$ est dite directe lorsque pour tout $x \in F + G$, il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$. Dans ce cas la somme est notée $F \oplus G$.
- Les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E lorsque :

$$E = F \oplus G.$$

Proposition 1.2

Soit F et G des sous-espaces vectoriels de E .

- $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient F et G .
- La somme $F + G$ est directe si et seulement si _____.
- F et G sont supplémentaires si et seulement si tout vecteur $x \in E$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

Remarque 1.3 : Si on considère l'application $\Phi : \begin{cases} F \times G & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{cases}$, alors

- Φ est une application linéaire et $\text{Im}(\Phi) =$ _____ ;
- F et G sont en somme directe si et seulement si Φ est _____ ;
- F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si Φ est _____.

Proposition 1.4 (Formule de Grassmann)

Si F et G sont de dimension finie, alors :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

En particulier, $\dim(F + G) \leq \dim(F) + \dim(G)$ avec égalité si et seulement si F et G sont en somme directe.

Proposition 1.5

Si E est de dimension finie et F et G des sous-espaces vectoriels de E , alors sont équivalents :

- F et G sont supplémentaires dans E ;
- $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$;
- $F + G = E$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Proposition 1.6

Si E est de dimension finie et F et G des sous-espaces vectoriels de E , les espaces F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si la concaténation d'une base de F et d'une base de G forme une base de E , dite adaptée à la somme directe.

Remarque 1.7 : On peut ainsi construire des sous-espaces vectoriels supplémentaires à partir d'une base de E .

Proposition 1.8

Si E est de dimension finie, alors tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire. Une base adaptée à cette somme directe est également dite adaptée au sous-espace vectoriel F .

I. B Sommes d'une famille de sous-espaces vectoriels

Définition 1.9

Soit $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E .

On appelle **somme des $E_1, \dots, E_p$** et on note $\sum_{i=1}^p E_i$ l'ensemble des vecteurs de

E de la forme $x = \sum_{i=1}^p x_i$ avec pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket, x_i \in E_i$.

Remarque 1.10 : Si F, G et H sont trois sous-espaces de E alors $(F + G) + H = F + G + H = F + (G + H)$.
La somme est associative.

Remarque 1.11 : Considérons l'application :

$$\begin{aligned}\Phi : \prod_{i=1}^p E_i &\longrightarrow E \\ (x_1, \dots, x_p) &\longmapsto \sum_{i=1}^p x_i\end{aligned}$$

Alors Φ est linéaire et $\text{Im}(\Phi) = \underline{\hspace{2cm}}$.

Proposition 1.12

Soit $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E .

La somme $\sum_{i=1}^p E_i$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient tous les E_i pour $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$.

Méthode 1.13 (pour montrer que $\sum E_i \subset G$)

Si $\begin{cases} \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, E_i \subset G; \\ G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E; \end{cases}$
alors : $\sum_{i=1}^p E_i \subset G$.

Définition 1.14

Soit $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E .

La somme $\sum_{i=1}^p E_i$ est dite **directe** lorsque pour tout $x \in \sum_{i=1}^p E_i$, il existe un unique

p -uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \prod_{i=1}^p E_i$ tel que $x = \sum_{i=1}^p x_i$.

Dans ce cas, la somme $\sum_{i=1}^p E_i$ est notée $\bigoplus_{i=1}^p E_i$.

Remarque 1.15 : La somme $\sum_{i=1}^p E_i$ est directe si et seulement si Φ est injective.

Théorème 1.16

Soit $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E .

La somme $\sum_{i=1}^p E_i$ est directe si et seulement si :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{i=1}^p E_i, \quad \sum_{i=1}^p x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, x_i = 0.$$

Proposition 1.17

Soit $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E .

La somme $\sum_{i=1}^p E_i$ est directe si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{la somme } \sum_{i=1}^{p-1} E_i \text{ est directe} \\ \left(\bigoplus_{i=1}^{p-1} E_i \right) \cap E_p = \{0\}. \end{array} \right.$$

Attention : Pour $p \geq 3$, il ne suffit pas que les intersections deux à deux des E_i soient réduites à $\{0_E\}$ pour que la somme des E_i soit directe.

Contre exemple 1.18 : Pour $E = \mathbb{R}^2$, $F = \underline{\hspace{2cm}}$, $G = \underline{\hspace{2cm}}$ et $H = \underline{\hspace{2cm}}$, les sous-espaces vectoriels F, G, H sont deux à deux en somme directe, mais la somme $F + G + H$ n'est pas directe.

Définition 1.19

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$. On appelle **projecteurs associés** à cette somme directe les p projecteurs sur l'un de ces sous-espaces vectoriels parallèlement à la somme (directe) des autres.

Théorème 1.20

Soit $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ et pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $\varphi_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$, alors il existe une unique application $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\varphi|_{E_i} = \varphi_i$ pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$.

Autrement dit : si $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$, on peut définir une application linéaire de E dans F en la définissant sur chacun des E_i .

I. C En dimension finie

Proposition 1.21

Soit $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E .

Si E est de dimension finie, on a $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ si et seulement si la concaténation d'une base de chacun des E_i pour $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ forme une base de E .

Une telle base est appelée **adaptée à la décomposition en somme directe**

$$E = \bigoplus_{i=1}^p E_i.$$

Remarque 1.22 : On peut ainsi former une décomposition en somme directe à partir d'une base de E .

Théorème 1.23

Soit $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E .

Si $E_1, \dots, E_p$ sont de dimension finie, alors :

$$\dim \left(\sum_{i=1}^p E_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(E_i)$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

II Matrices définies par blocs

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Soit $(p_1, p_2) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $p_1 + p_2 = p$ et $(q_1, q_2) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $q_1 + q_2 = q$.

On définit quatre sous-matrices de A : $A_{1,1} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p_1 \\ 1 \leq j \leq q_1}} \in \mathcal{M}_{p_1,q_1}(\mathbb{K})$,

$A_{1,2} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p_1 \\ q_1+1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p_1,q_2}(\mathbb{K})$, $A_{2,1} = (a_{i,j})_{\substack{p_1+1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q_1}} \in \mathcal{M}_{p_2,q_1}(\mathbb{K})$ et

$A_{2,2} = (a_{i,j})_{\substack{p_1+1 \leq i \leq p \\ q_1+1 \leq j \leq q_2}} \in \mathcal{M}_{p_2,q_2}(\mathbb{K})$.

On peut alors écrire $A = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} \end{array} \right)$ et on dit que la matrice A est définie **par blocs**.

Exemple 2.1 : Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,
 $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix}$. Alors

$$M = \underline{\hspace{2cm}}$$

Interprétation : Soit A la matrice d'une application linéaire u d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F relativement à des bases $\mathcal{B}$ pour E et $\mathcal{B}'$ pour F . En séparant la famille $\mathcal{B}$ en deux familles $\mathcal{B}_1$ des q_1 premiers vecteurs et $\mathcal{B}_2$ des autres vecteurs de B , on obtient les bases de deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 supplémentaires dans E . De même pour $F = F_1 \oplus F_2$ et π_1, π_2 les projecteurs associés. Alors $A_{i,j}$ est la matrice de l'application linéaire induite par $\pi_i \circ u|_{E_j}$ de E_j dans F_i relativement aux bases $\mathcal{B}_j$ et $\mathcal{B}'_i$.

Proposition 2.2

Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On suppose que A et B sont définies par blocs selon le même découpage ($p = p_1 + p_2$, $q = q_1 + q_2$) :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} \end{array} \right) \text{ et } B = \left(\begin{array}{c|c} B_{1,1} & B_{1,2} \\ \hline B_{2,1} & B_{2,2} \end{array} \right).$$

Alors :

$$A + B = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} + B_{1,1} & A_{1,2} + B_{1,2} \\ \hline A_{2,1} + B_{2,1} & A_{2,2} + B_{2,2} \end{array} \right)$$

et :

$$\lambda A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda A_{1,1} & \lambda A_{1,2} \\ \hline \lambda A_{2,1} & \lambda A_{2,2} \end{array} \right)$$

Proposition 2.3

Soit $A = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ définie par blocs, alors :

$$A^\top = \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1}^\top & A_{2,1}^\top \\ \hline A_{1,2}^\top & A_{2,2}^\top \end{array} \right)$$

Proposition 2.4

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.

On suppose que A et B sont définies par blocs et que le découpage en colonnes de A est le même que le découpage en lignes de B ($q = q_1 + q_2$).

Alors

$$\begin{aligned} A \times B &= \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c|c} B_{1,1} & B_{1,2} \\ \hline B_{2,1} & B_{2,2} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} & A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} \\ \hline A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1} & A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Exemple 2.5 : Déterminer une matrice N définie par bloc telle le produit $M \times N$ puisse être calculé par blocs.

Attention : On peut faire les calculs sur les matrices par blocs de la même manière que si c'était des matrices dont les coefficients sont eux-même des matrices. Mais la multiplication entre deux blocs n'est pas commutative.

On peut généraliser ceci à un nombre quelconque de blocs :

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,m} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,m} \\ \hline \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hline A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,m} \end{array} \right)$$

Pour le produit AB , le découpage selon les colonnes de A doit être le même que le découpage selon les lignes de B .

Remarque 2.6 : On généralise également les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes (échange, multiplication par un scalaire, transvection). En particulier une transvection ($L_i \leftarrow L_i + aL_j$) sur des blocs de p_i lignes correspond à p_i transvections sur les lignes de la matrice. Elle laisse donc le déterminant invariant.

Lorsque $n = m$, on appelle matrice **triangulaire (supérieure) par blocs** toute matrice de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ \hline 0 & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{array} \right)$$

et matrice **diagonale par blocs** toute matrice de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & A_{2,2} & \cdots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{array} \right).$$

Théorème 2.7

Si $A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ \hline 0 & \cdots & 0 & A_p \end{array} \right)$ est une matrice triangulaire par blocs telle que

pour tout $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, A_k est une matrice carrée, alors : $\det(A) = \prod_{k=1}^p \det(A_k)$.

III Sous-espaces stables

Définition 3.1

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et φ un endomorphisme de E .

- On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est **stable par φ** lorsque : $\varphi(F) \subset F$, i.e. : $\varphi|_F : F \rightarrow F$.
- L'application $\tilde{\varphi} : \begin{array}{c} F \rightarrow F \\ u \mapsto \varphi(u) \end{array}$ est alors un endomorphisme de F appelé **endomorphisme induit par φ sur F** .

Exemples 3.2 : • Quelque soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, E et $\{0_E\}$ sont stables par φ .

- Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et φ l'application de dérivation (linéaire sur E). Déterminer des sous-espaces vectoriels non triviaux stables par φ .

Proposition 3.3

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et u et v deux endomorphismes de E qui commutent c'est-à-dire tels que $u \circ v = v \circ u$.

Alors les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(v)$ et $\text{Im}(v)$ sont stables par u .

Remarque 3.4 : En particulier $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par u .

Proposition 3.5

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à F .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- F est stable par φ
- la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire par blocs : $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$ où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Dans ce cas, A est la matrice de l'endomorphisme induit par φ sur F dans la base $(e_1, \dots, e_p)$.

Théorème 3.6

Soit $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ et $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à cette décomposition.

Sont équivalents :

- $E_1, \dots, E_p$ sont stables par φ
- la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix} \quad \text{où pour tout } i \in \{1, \dots, p\}, A_i \in \mathcal{M}_{\dim E_i}(\mathbb{K}).$$

Dans ce cas, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, A_i est la matrice de $\varphi|_{E_i}$ dans la base $\mathcal{B}_i$.

Remarque 3.7 : Donner un condition nécessaire et suffisante pour que la matrice de φ dans une certaine base soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,p} \\ 0 & A_{2,2} & \cdots & A_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{p,p} \end{pmatrix}$$

Proposition 3.8 (droite stable)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et u un endomorphisme de E . Une droite vectorielle D est stable par u si et seulement si il existe un scalaire λ tel que pour tout $x \in D$, $u(x) = \lambda x$.

IV Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

IV. A Polynômes d'un endomorphisme

Définition 4.1

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on note :

$$P(u) = \sum_{k=0}^p a_k u^k \in \text{_____}.$$

Remarque 4.2 : Le polynôme d'endomorphisme $P(u)$ est _____.

Théorème 4.3

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'application $P \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbre de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$. Son image, notée $\mathbb{K}[u]$, est une sous algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

Attention :

- $PQ(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$ et pas $P(Q(u))$;
- pour $x \in E$, l'écriture $P(u)(x)$ a un sens car $P(u) \in \mathcal{L}(E)$; mais l'écriture $P(u(x))$ n'a pas de sens : $u(x) \in E$.

IV. B Idéal annulateur

Définition 4.4

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Le noyau du morphisme d'algèbre $P \mapsto P(u)$ est l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(u) = 0$, c'est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ appelé **idéal annulateur** de u . Les polynômes de cet idéal annulateur sont appelés **polynômes annulateurs** de u .

Exemples 4.5 :

- Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur, déterminer un polynôme annulateur de P .
- Soit $D \in \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ définie par $D(f) = f'$. Montrer que le polynôme nul est le seul polynôme annulateur de D .

IV. C En dimension finie

Définition/Proposition 4.6

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors l'idéal annulateur de u est non nul et il existe un unique polynôme unitaire générateur de l'idéal annulateur de u , appelé **polynôme minimal** de u et noté μ_u ou π_u .

Remarques 4.7 : • Tout polynôme annulateur de u est un multiple du polynôme minimal de u : μ_u ;

- μ_u est le seul polynôme annulateur unitaire de degré minimal ;
- $\mu_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$;
- $\deg(\mu_u) \geq 1$.

Définition 4.8

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on note :

$$P(M) = \sum_{k=0}^p a_k M^k \in \text{_____}.$$

L'application $P \mapsto P(M)$ est un morphisme d'algèbre de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Son image, notée $\mathbb{K}[M]$, est une sous algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Son noyau est l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(M) = 0$, c'est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ appelé **idéal annulateur** de M . Les polynômes de cet idéal annulateur sont appelés **polynômes annulateurs** de M et on appelle **polynôme minimal** de M , et on note μ_M (ou π_M) l'unique polynôme unitaire générateur de l'idéal annulateur de M .

Exemple 4.9 : Polynôme minimal annulateur de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Rappel : Si $\mathcal{B}$ est une base de E de dimension n , alors : $u \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme d'algèbre de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 4.10

Soit $\mathcal{B}$ est une base de E de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, alors :

- $\forall P \in \mathbb{K}[X], \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(u)) = P(A)$;
- les polynômes annulateurs de u sont les polynômes annulateurs de A ;
- $\mu_u = \mu_A$.

Corollaire 4.11

Deux matrices semblables ont le même polynôme minimal.

Théorème 4.12

Soit E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et d le degré du polynôme minimal de u .

Alors la famille $(u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

Application : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mu_A^{\mathbb{R}}$ son polynôme minimal dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mu_A^{\mathbb{C}}$ son polynôme minimal dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $\mu_A^{\mathbb{R}} = \mu_A^{\mathbb{C}}$.

IV. D Application : calcul des puissances d'une matrice

Méthode 4.13

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et μ_A son polynôme minimal. On effectue la division euclidienne de X^k par μ_A : $X^k = \mu_A \times Q + R$ et on évalue en A : $A^k = R(A)$.

Exemple 4.14 : Polynôme minimal et puissances de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 4.15 : On peut également calculer les puissances de cette matrice à l'aide de _____.

IV. E Exemple fondamental : matrice compagnon (HP)

Le résultat suivant n'est pas au programme, mais c'est un exercice classique.

Proposition 4.16

Tout polynôme unitaire $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ est le polynôme minimal d'au moins une matrice, sa matrice compagnon :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

IV. F Lemme de décomposition des noyaux

Théorème 4.17 (Lemme de décomposition des noyaux)

Soit $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux, $P = \prod_{i=1}^r P_i$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Alors :

$$\text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(P_i(u)).$$