

Exercices

Exercice 1. Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

1. (f_1, f_2) avec $f_1 : x \mapsto \sin x$; $f_2 : x \mapsto \cos x$;
2. $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ avec $f_i : x \mapsto (x - x_0)^i$ où x_0 est fixé;
3. $(f_0, f_1, \dots, f_n, \sin)$ avec $f_i : x \mapsto x^i$.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

1. la suite $(\text{Ker}(f^n))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.
2. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, si $\text{Ker}(f^i) = \text{Ker}(f^{i+1})$, alors : $\forall j \geq i, \text{Ker}(f^i) = \text{Ker}(f^j)$.
3. Il existe $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{Ker}(f^i) = \text{Ker}(f^{i+1})$.
4. $(\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}) \Leftrightarrow \text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, F et G des sous-espaces vectoriels de E . Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 4. Soit E, F et G des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Montrer que $\text{rg}(v \circ u) \leq \text{rg}(v)$, avec égalité si u est un isomorphisme.
2. On note $\tilde{v}$ l'application linéaire induite par v de $\text{Im}(u)$ dans $\text{Im}(v \circ u)$. Montrer que $\tilde{v}$ est bien définie et surjective.
3. En déduire que $\text{rg}(v \circ u) \leq \text{rg}(u)$.
4. Cas d'égalité ?

Exercice 5. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M \in \mathcal{A}$. Montrer que si $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $M^{-1} \in \mathcal{A}$.

Exercice 6. Soit $p_1, \dots, p_n$ des projecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie tels que $p_1 + \dots + p_n = \text{id}_E$.

1. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \text{rg}(p_i) = \text{tr}(p_i)$.
2. Montrer que $E = \text{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \text{Im}(p_n)$.

Exercice 7. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang r , décomposée par blocs sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec $A \in \text{GL}_r(\mathbb{K})$.

1. Montrer que pour tout vecteur colonne $Y \in \mathbb{K}^{n-r}$, il existe un vecteur colonne $X \in \mathbb{K}^r$ tel que :

$$M \begin{pmatrix} 0_r \\ Y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$

2. En déduire que $D = CA^{-1}B$.

Exercice 8. On dit qu'un nombre réel est algébrique lorsqu'il est racine d'un polynôme non nul de $\mathbb{Q}[X]$.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $H_a = \text{Vect}(\{a^n; \text{ avec } n \in \mathbb{N}\})$ dans le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$.

1. Montrer que a est algébrique si et seulement si il est racine d'un polynôme P non nul à coefficients entiers.
2. Montrer que a est algébrique si et seulement si H_a est de dimension finie.
3. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est un sous-corps de $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est algébrique et déterminer un polynôme annulateur de a . Même question avec $a = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$.

Exercice 9. Soit $n > p$ deux entiers naturels non nuls, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Déterminer $\det(AB)$.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Calculer $\det(A_n)$ en utilisant une relation de récurrence.

Exercice 11. Déterminant de Vandermonde.

Soit $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$, on pose :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On propose plusieurs méthodes pour calculer ce déterminant.

1. Par opérations élémentaires et relation de récurrence :

- Effectuer les opérations $C_k \leftarrow C_k - a_n C_{k-1}$ pour k de n à 2.
- En déduire une relation de récurrence, puis la formule générale.

2. (a) Soit P un polynôme unitaire de degré $n - 1$. Montrer que :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & P(a_1) \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & P(a_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & P(a_n) \end{vmatrix}$$

- En déduire une relation de récurrence à l'aide du polynôme $P = \prod_{k=1}^{n-1} (X - a_k)$, puis la formule générale.

3. On suppose $a_1, \dots, a_n$ distincts et on pose pour tout $x \in \mathbb{C}$, $P(x) = V(a_1, \dots, a_{n-1}, x)$.

- Montrer que P est une fonction polynomiale de degré inférieur à $n - 1$ et déterminer le coefficient de X^{n-1} du polynôme P .
- Déterminer les racines de P et en déduire $V(a_1, \dots, a_n)$.

Exercice 12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice à diagonale strictement dominante, c'est à dire :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|,$$

montrer que A est inversible.

Exercice 13.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T_n(\cos x) = \cos(nx).$$

Préciser le degré et le coefficient dominant de T_n .

2. Pour $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}^{n+1}$, calculer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a_0) & \cos(2a_0) & \dots & \cos(na_0) \\ 1 & \cos(a_1) & \cos(2a_1) & \dots & \cos(na_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos(a_n) & \cos(2a_n) & \dots & \cos(na_n) \end{vmatrix}$$

Indication : On pourra se ramener à un déterminant de Vandermonde.

Exercice 14. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme minimal de A .

Indication : On cherchera un polynôme annulateur de degré 2.

- En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
- Exprimer A^k en fonction de A et I_3 pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Banque CCINP

Exercice 15 (CCINP 60). Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\text{Ker } f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\text{Im } f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$?

Exercice 16 (CCINP 62). Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f .
2. Prouver que $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$:
 - (a) en utilisant le lemme des noyaux.
 - (b) sans utiliser le lemme des noyaux.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie. Prouver que $\text{Im}(f + \text{Id}) = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

Exercice 17 (CCINP 64).

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n .

1. Démontrer que : $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f \implies \text{Im } f = \text{Im } f^2$.
2. (a) Démontrer que : $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff \text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.
(b) Démontrer que : $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \implies E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.

Exercice 18 (CCINP 85).

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
 - (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$.
 - (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
 a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in \llbracket 0, r - 1 \rrbracket$, $P^{(k)}(a) = 0$.
2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 19 (CCINP 87).

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$, $n + 1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si $b_0, b_1, \dots, b_n$ sont $n + 1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant

$$\deg P \leq n \text{ et } \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_i) = b_i.$$

2. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
Expliciter ce polynôme P , que l'on notera L_k , lorsque :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

3. Prouver que $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p$.

Exercice 20 (CCINP 90).

$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.

Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\Phi : \begin{matrix} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & (P(a_1), P(a_2), P(a_3)) \end{matrix}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\}, L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
 - (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
 - (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3 .
3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) .
4. **Application** : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1), B(1, 3), C(2, 1)$.
Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C .