

Algèbre - Chapitre 1 : Formalisme et notations

2026-2027

Exercice 1 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Traduire les phrases suivantes avec des quantificateurs :

1. La fonction f s'annule au moins une fois.
2. La fonction f est la fonction nulle.
3. La fonction f s'annule une seule fois sur l'intervalle $[0; 1]$.
4. La fonction f s'annule au moins deux fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :

Soit $\mathcal{T}$ un triangle. On considère les propositions suivantes :

A : $\mathcal{T}$ est un triangle rectangle.

B : le carré de la longueur du plus grand côté est la somme des carrés des longueurs des deux plus petits.

On attribue à Pythagore les résultats suivants :

T : Aux triangles rectangles, le carré du côté qui soutient l'angle droit est égal aux carrés des deux autres côtés.

R : Si le carré de l'un des côtés d'un triangle est égal aux carrés des deux autres côtés, l'angle entre ces côtés est droit.

1. Ecrire le théorème T et sa réciproque R en fonction des propositions A et B .
2. Soit ABC un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 6$. Laquelle des deux propositions de Pythagore utiliseriez-vous pour dire que ABC n'est pas rectangle ?

Exercice 3 :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles.

Que signifient les assertions suivantes pour cette fonction ?

1. $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = C$.
2. $\forall x \in I, f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
3. $\forall x \in I, \forall y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
4. $\forall x \in I, \forall y \in I, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
5. $\forall x \in I, \exists C \in \mathbb{R}, f(x) = C$.
6. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in I, y = f(x)$.
7. $\exists x \in I, \forall y \in \mathbb{R}, y = f(x)$.
8. $\forall x \in I, \exists M \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$.
9. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$.
10. $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) \leq M$.

Exercice 4 :

Soient E et F deux intervalles et soit une fonction $f : E \rightarrow F$.

1. Donner la négation de chacune des propositions suivantes :
 A : $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$.
 B : $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$.
 C : $\forall x, y \in E, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
2. Ecrire la contraposée des implications suivantes :
 P : $x \geq \alpha \Rightarrow f(x) \geq \beta$.
 Q : $a \in A \Rightarrow a \leq 1$.
 R : $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Exercice 5 :

Soient x et y deux réels. Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $xy \geq 0$;
- (ii) $x = 0$ ou $y = 0$ ou $(x > 0 \text{ et } y > 0)$ ou $(x < 0 \text{ et } y < 0)$.

Exercice 6 :

Montrez que si x et y sont deux réels tels que $xy > 0$ et $x + y \geq 0$, alors $x > 0$ et $y > 0$.

Exercice 7 :

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est pair, alors n est pair également.

Exercice 8 :

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$, n réels positifs ou nuls.

Montrez que si leur somme est nulle, alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i = 0$.

Exercice 9 :

Montrez que les deux assertions proposées sont équivalentes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \geq n$ et $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 \geq x$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq 0$.
3. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$, $|u_n| \leq \varepsilon$ et $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$, $|u_n| \leq \varepsilon/2$

Exercice 10 : quelques récurrences

1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. On définit la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{n+1} = S_n + 2n$$

Calculer S_1 , S_2 , S_3 et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = n(n-1)$.

3. Soit (u_n) une suite vérifiant pour tout $n \geq 0$ que

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$$

On suppose que $u_0 = 1$ et $u_1 = 6$.

Montrez que pour tout $n \geq 0$, $u_n = (2n+1)2^n$

4. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$ par

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + 4u_n}{3u_{n+1} + 2u_n}$$

Déterminez la valeur de la suite u_n pour tout entier n .

5. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 0$, $v_1 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+2} = v_{n+1} + 3v_n$$

Calculer v_2 et v_3 et montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq n 5^n$.

6. On considère la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $w_0 = 0$, $w_1 = 1$, $w_2 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+3} = w_{n+2} + 2w_{n+1} + 3w_n$$

. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq w_n \leq 3^n$$

1. traité en TD

2. traité en TD

3. On pose P_n la proposition $u_n = (2n + 1)2^n$.

Montrons par récurrence double que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation $u_0 = 1$ et $1 = (2 \times 0 + 1) \times 2^0$ donc P_0 est vraie.

De même, comme $(2 \times 1 + 1) \times 2^1 = 6$ et $u_1 = 6$, P_1 est vraie également.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n et P_{n+1} sont vraies, c'est à dire

$$\begin{cases} u_n = (2n + 1)2^n \\ u_{n+1} = (2(n + 1) + 1)2^{n+1} \end{cases}$$

Notez ici l'importance des parenthèses pour la formule donnant u_{n+1} ...

On veut montrer que P_{n+2} est vraie.

Comme $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$, l'hypothèse de récurrence permet d'écrire que

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 4(2n + 3)2^{n+1} - 4(2n + 1)2^n \\ &= 2^{n+2}(4n + 6 - 2n - 1) \\ u_{n+2} &= 2^{n+2}(2n + 5) \end{aligned}$$

Or $2n + 5 = 2(n + 2) + 1$, donc la dernière égalité est en réalité P_{n+2} .

L'hérédité est donc vérifiée.

Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (2n + 1)2^n$.

4. On observe $u_2 = 1$, $u_3 = 1$, etc...

On conjecture donc que $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on va le montrer par récurrence double.

Posons P_n la proposition $u_n = 1$.

Initialisation $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ donc P_0 et P_1 sont vraies.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n et P_{n+1} sont vraies, c'est à dire

$$\begin{cases} u_n = 1 \\ u_{n+1} = 1 \end{cases}$$

On veut montrer que P_{n+2} est vraie.

Comme $u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + 4u_n}{3u_{n+1} + 2u_n}$, l'hypothèse de récurrence permet d'écrire que

$$u_{n+2} = \frac{1 + 4}{3 + 2} = 1$$

C'est bien P_{n+2} et l'hérédité est vérifiée.

Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.

5. traité en TD.

6. Cette fois, c'est une récurrence triple. Mais fondamentalement pas de différence.

Soi P_n la proposition $0 \leq w_n \leq 3^n$.

Montrons par récurrence triple que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Initialisation On a $w_0 = 0$ et on a bien $0 \leq 0 \leq 3^0$, donc P_0 est vraie.

De même $w_1 = 1$ et on a bien $0 \leq 1 \leq 3^1$, donc P_1 est vraie.

Enfin, $0 \leq 2 \leq 3^2$ avec $w_2 = 2$, donc P_2 est vraie.

Hérédité . Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n , P_{n+1} et P_{n+2} sont vraies, c'est à dire

$$\begin{cases} 0 \leq w_n \leq 3^n \\ 0 \leq w_{n+1} \leq 3^{n+1} \\ 0 \leq w_{n+2} \leq 3^{n+2} \end{cases}$$

Comme $w_{n+3} = w_{n+2} + 2w_{n+1} + 3w_n$ et que, par l'hypothèse de récurrence, chacun de ces termes est positif, par somme de nombre positifs, on a déjà $w_{n+3} \geq 0$.

De plus, les hypothèses de majorations de chacun des termes donnent, par somme d'inégalités :

$$\begin{aligned} w_{n+3} &\leq 3^{n+2} + 2 \times 3^{n+1} + 3 \times 3^n \\ &\leq 3^{n+1}(3 + 2 + 1) \\ w_{n+3} &\leq 6 \times 3^{n+1} \end{aligned}$$

Or $6 \leq 9$, donc on obtient $w_{n+3} \leq 9 \times 3^{n+1} = 3^{n+3}$

On a bien vérifié P_{n+3} .

Conclusion La proposition P_n est bien vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.