

Révision d'analyse, équations, récurrence

DM 1

2026-2027



Exercice 1 :

Soit $P : x \mapsto x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

1. Trouver un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(\alpha) = 0$.
2. En remplaçant α par la valeur de la question précédente, déterminez $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$P(x) = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$$

3. En déduire l'ensemble de définition de la fonction

$$f : x \mapsto \ln(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)$$

1. On observe que $P(1) = 0$, donc on peut prendre $\boxed{\alpha = 1}$
2. Il y a plusieurs façon de faire. Le plus fréquent dans vos copies est de procéder par identification. Ce qui se rédige comme ceci :
D'une part, $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ et d'autre part on veut :

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - 1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c \end{aligned}$$

Par identification, on a donc
$$\begin{cases} a &= 1 \\ b - a &= -2 \\ c - b &= -5 \\ -c &= 6 \end{cases}$$

d'où $a = 1, b = -1$ et $c = -6$

D'où $\boxed{P(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6)}$

On pouvait aussi factoriser directement, soit "de tête", soit via une division euclidienne, ou encore avec un tableau de Horner.

3. La fonction $\ln$ étant définie sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(x)$ existe si et seulement si $P(x) > 0$.
Or $x^2 - x - 6$ a pour racine -2 et 3 (évidentes, ou via le discriminant), donc on peut écrire que

$$P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$$

Pour discuter du signe de cette expression, je recommande TRES fortement de faire un tableau de signes, c'est à dire un truc comme ça :

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$			
$x-1$		$-$	$-$	0	$+$	$+$		
$x+2$		$-$	0	$+$	$+$	$+$		
$x-3$		$-$	$-$	$+$	0	$+$		
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

On en déduit immédiatement que f est définie sur $\boxed{]-2; 1[\cup]3; +\infty[}$.



Exercice 2 :

En précisant soigneusement les ensembles de définition et de résolution, résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle :

1. $\sqrt{3x+6} = x + 2$.
2. $\ln(x^2 - 5) - \ln(5x - 11) = 0$.

1. On commence par relever le problème de définition, à cause de la racine carrée. Les termes de l'équations sont définis si et seulement si $3x + 6 \geq 0$, c'est à dire si et seulement si $x \geq -2$.
De plus, l'équation n'a de solution que si $x + 2$ positif, ce qui est déjà le cas sur l'ensemble de définition.
L'ensemble de résolution est donc le même que l'ensemble de définition, les deux membres de l'égalité sont positifs, et on peut élever au carré en conservant l'équivalence :

$$\begin{aligned}\sqrt{3x+6} = x+2 &\Leftrightarrow 3x+6 = x^2+4x+4 \\ &\Leftrightarrow x^2+x-2=0 \\ &\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=-2\end{aligned}$$

Les deux possibilités obtenues sont bien dans l'ensemble de résolution, et donc l'ensemble des solutions est $S = \{1; -2\}$.

2. A nouveau un problème de définition à cause des logarithmes. Les termes de l'équations sont définis si et seulement si $x^2 - 5 > 0$ et $5x - 11 > 0$.
Les racines de $x^2 - 5$ étant $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$, la première condition donne $x \in]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, +\infty[$, et la seconde condition donne $x \geq \frac{11}{5}$.

Il faut savoir ordonner $\sqrt{5}$ et $\frac{11}{5}$: il suffit de regarder les carrés !

En effet, $\left(\frac{11}{5}\right)^2 = \frac{121}{25} < 5$ (puisque $5 \times 25 = 125$).

Ainsi, $\frac{11}{5} < \sqrt{5}$ et finalement l'équation est définie sur $]\sqrt{5}, +\infty[$, qui va être aussi notre ensemble de résolution (aucun info supplémentaire a priori...)

$$\begin{aligned}\ln(x^2 - 5) + \ln(5x - 11) = 0 &\Leftrightarrow \ln(x^2 - 5) = \ln(5x - 11) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 5 = 5x - 11 \quad \text{car } \exp \text{ est bijective (...)} \\ &\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 3\end{aligned}$$

Cette fois, la solution 2 n'est pas possible, car hors de l'ensemble de définition.

On en déduit que l'ensemble des solutions est $S = \{3\}$.



Exercice 3 :

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2n^2}{n+2} u_n \end{cases}$$

1. Vérifiez que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+2)^2 - \frac{2n^2}{n+2} - (n+1)^2 \geq 0$$

2. Montrez par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq n^2$

1. Il suffit de calculer l'expression de gauche et montrer qu'elle est positive. **il n'y a aucun intérêt ici à travailler via des équivalences comme si on résolvait une équation.**

$$\begin{aligned}(n+2)^2 - \frac{2n^2}{n+2} - (n+1)^2 &= n^2 + 4n + 4 - \frac{2n^2}{n+2} - n^2 - 2n - 1 \\ &= 2n + 3 - \frac{2n^2}{n+2} \\ &= \frac{(2n+3)(n+2) - 2n^2}{n+2} \\ &= \frac{7n+6}{n+2}\end{aligned}$$

Comme $n \in \mathbb{N}$, on a $n \geq 0$ et donc $7n+6 \geq 0$ et $n+2 \geq 0$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)^2 - \frac{2n^2}{n+2} - (n+1)^2 \geq 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{P}(n)$ la proposition " $u_n \leq n^2$."

Montrons par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Initialisation : On a déjà $u_1 = 1 \leq 1^2$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et comme $u_2 = u_1 + \frac{2}{0+2}u_0 = 2$, on vérifie également que $u_2 \leq 2^2$, donc que $\mathcal{P}(2)$ est vraie aussi.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, c'est à dire que $\begin{cases} u_n \leq n^2 \\ u_{n+1} \leq (n+1)^2 \end{cases}$ (H.R.)

Comme $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2}u_n$, l'hypothèse de récurrence sur u_n donne que

$$\frac{2}{n+2}u_n \leq \frac{2n^2}{n+2}$$

En utilisant celle sur u_{n+1} , par somme d'inégalités, on obtient donc que

$$u_{n+2} \leq (n+1)^2 + \frac{2n^2}{n+2}$$

Or d'après la question 1, $(n+2)^2 - \frac{2n^2}{n+2} - (n+1)^2 \geq 0$, c'est à dire $(n+2)^2 \geq \frac{2n^2}{n+2} + (n+1)^2$

On en déduit donc que

$$u_{n+2} \leq (n+2)^2$$

C'est à dire $\mathcal{P}_{n+2}$ est vérifiée : on a bien hérédité.

Conclusion D'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq n^2}$.