

Trousse de survie - formalisme - fonctions

DS1 - durée : 2h

Conseils :

1. Lire tout le sujet avant de commencer afin de choisir l'ordre dans lequel vous comptez traiter les exercices. Les 4 premiers exos sont plus classés par thème que par difficulté, mais l'exercice 5 est plus difficile et demande plus de temps pour être traité.
2. Le but d'un DS est de faire le plus de choses justes, et pas le plus de choses possible : ne chercher pas à tout faire (le sujet est de toute façon long), mais soyez rigoureux et attentifs dans ce qui est fait.
3. La rigueur de la rédaction et des justifications est essentielle. L'absence de justification supprime tous les points de la question, même si la réponse finale est juste. En particulier, n'oubliez pas de préciser les liens entre vos calculs ("donc", "alors", "d'où", "si et seulement si", "or", etc....)
4. Une présentation agréable est attendue : laisser une marge à gauche, aérer votre texte, présentez proprement et **encadrez vos résultats**.

Exercice 1 : Une première équation (3,5 pts)

Soit $P : x \mapsto x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

1. Trouver un $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(\alpha) = 0$.
2. En remplaçant α par la valeur de la question précédente, déterminez $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$P(x) = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$$

3. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{3x} - 3e^{2x} - 6e^x + 8 = 0$$

Exercice très proche du DM pour les deux premières questions

1. On observe que $P(1) = 0$. On peut prendre $\boxed{\alpha = 1}$.
2. En factorisant par $(x - 1)$ on obtient (avec système ou autre, cf corrigé DM)

$$\boxed{P(x) = (x - 1)(x^2 - 2x - 8)}$$

3. On effectue le changement d'inconnue $X = e^x$. L'équation devient

$$X^3 - 3X^2 - 6X + 8 = 0$$

D'après la question précédente, $X^3 - 3X^2 - 6X + 8 = (X - 1)(X^2 - 2X - 8)$.

En outre, les racines de $X^2 - 2X - 8$ sont -2 et 4 , et donc

$$X^3 - 3X^2 - 6X + 8 = 0 \Leftrightarrow (X - 1)(X + 2)(X - 4) = 0 \Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = -2 \text{ ou } X = 4$$

Finalement :

$$e^{3x} - 3e^{2x} - 6e^x + 8 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1, e^x = -2 \text{ ou } e^x = 4$$

la deuxième possibilité est écartée, et on en déduit l'ensemble des solutions de l'équation

$$\boxed{S = \{0, \ln(4)\}}$$

Exercice 2 : Des récurrences (5pts)

1. Soit la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} &= \frac{3u_n - 2}{u_n} \end{cases}$$

Calculez les premiers termes de la suite afin de donner une conjecture sur la valeur de u_n , puis démontrez cette conjecture par récurrence.

2. On appelle suite de Fibonacci la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 1 \\ \forall n \geq 0, u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

1. On calcule $u_1 = \frac{3u_0 - 2}{u_0} = \frac{1}{1} = 1$, puis $u_2 = 1$ et éventuellement $u_3 = 1$: il semblerait donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.

Démontrons donc par récurrence que la propriété $P(n) : u_n = 1$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : On a bien $u_0 = 1$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est à dire $u_n = 1$.

$$\text{Alors } u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{u_n} = \frac{3 \times 1 - 2}{1} = 1$$

La propriété $P(n+1)$ est donc vérifiée.

Conclusion : Par le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1.}$

2. On va procéder par récurrence double. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n)$ la proposition $u_n \geq n$.

Initialisation : On a $u_1 = 1 \geq 1$ et $u_2 = 1 + 1 = 2 \geq 2$, donc $P(1)$ et $P(2)$ sont vérifiées.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Supposons que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies.

On a donc $u_n \geq n$ et $u_{n+1} \geq n+1$ (HR).

Par somme d'inégalité, il vient

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \geq n + n + 1 = 2n + 1$$

Il suffit maintenant de montrer que $2n + 1 \geq n + 2$.

Or $2n + 1 - (n + 2) = n - 1$ et $n \geq 1$, donc $2n + 1 - (n + 2) \geq 0$ et $2n + 1 \geq n + 2$

On obtient bien $P(n+2) : u_{n+2} \geq n+2$

Conclusion : Par le principe de récurrence (double), $\boxed{u_n \geq n \text{ pour tout } n \geq 1.}$

Pour la limite, comme $u_n \geq n$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, on en déduit, par "théorème de gardarmes" ou "par minoration" que $\boxed{\lim u_n = +\infty.}$



Exercice 3 : Ensembles de définition (5,5pts)

Déterminez les ensembles de définition des fonctions suivantes. On justifiera soigneusement la réponse.

1. $f_1 : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$
2. $f_2 : x \mapsto \ln\left(\frac{2+x}{3-x}\right)$
3. $f_3 : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x - 4}}$

1. La fonction racine carrée étant définie sur $\mathbb{R}_+$, $f_1(x)$ existe si et seulement si $x^2 - 4 \geq 0$. Or $x^2 - 4$ a pour racines 2 et -2 , donc est positif à l'extérieur de celles-ci.

Ainsi f_1 est définie sur $] -\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.

2. Comme le logarithme est définie sur $\mathbb{R}_+$, on cherche quand $\frac{2+x}{3-x}$ est strictement positif.

Dressons un tableau de signe :

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$2+x$		$-$	0	$+$
$3-x$		$+$	0	$-$
$\frac{2+x}{3-x}$		$-$	0	$+$

Ainsi, f_2 est définie sur $] -2; 3[$

3. Même problématique que f_2 : on cherche quand $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x - 4}$ est définie et est positif ou nul.

Les racines de $x^2 - 1$ sont 1 et -1 , celles de $x^2 + 3x - 4$ sont 1 et -4 .

Un tableau de signe va à nouveau nous aider :

x	$-\infty$	-4	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	$+$	$+$	0	$-$	0
$x^2 + 3x - 4$	$+$	0	$-$	$-$	0
$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x - 4}$	$+$	$-$	0	$+$	$+$

Ainsi, f_3 est définie sur $] -\infty, -4[\cup [-1; 1[\cup]1; +\infty[$



Exercice 4 : Des systèmes (4pts)

1. Résoudre le système suivant, d'inconnues x, y et z réelles :

$$S_1 : \begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 2x - 5y + 3z = 5 \\ 3x - 7y + 5z = 8 \end{cases}$$

2. Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système suivant, d'inconnues x, y, z réelles, en fonction des valeurs de m :

$$\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

1. On utilise le pivot de Gauss. Ce système est un de ceux de l'an dernier. Si vous aviez étudié le sujet de l'an dernier, vous avez du le reconnaître...

$$S_1 : \begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 2x - 5y + 3z = 5 \\ 3x - 7y + 5z = 8 \end{cases} \begin{matrix} \Longleftrightarrow \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} \begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ y - z = 3 \\ 2y - z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \Longleftrightarrow \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{matrix} \begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ y - z = 3 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

L'unique solution de S_1 est donc $\boxed{x = 9, y = 2, z = -1}$.

2. On résout le système le plus loin possible avant de faire des cas pour m .

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \\ x + y - z = 1 \end{array} \right. \xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow L_1 - 3L_2]{L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1} \left\{ \begin{array}{l} 3x + y - z = 1 \\ 7y - 7z = 1 - 3m \\ 2y - 2z = 2 \end{array} \right.$$

$$\xLeftrightarrow[L_3 \leftarrow \frac{7}{2}L_3 - L_2]{\frac{7}{2}L_3 - L_2} \left\{ \begin{array}{l} 3x + y - z = 1 \\ 7y - 7z = 1 - 3m \\ 0 = 3m + 6 \end{array} \right.$$

Le système est de rang 2 et admet des solutions si et seulement si $3m + 6 = 0$. Ainsi :

Si $m \neq -2$: le système est incompatible et l'ensemble des solutions est $\boxed{S = \emptyset}$

Si $m = -2$: le système est compatible et devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + y - z = 1 \\ 7y - 7z = 7 \\ 0 = 0 \end{array} \right.$$

Il y a une inconnue paramètre et cela donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + y - z = 1 \\ 7y - 7z = 7 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = z + 1 \\ z \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Exercice 5 : Polynôme du second degré avec paramètre (7pts)

Soit un nombre réel $m \neq 0$ et soit

$$P_m(x) = (m+1)x^2 - \frac{x}{m} - (m-1)$$

On veut étudier ce polynôme en fonction de m et pour cela on pose l'équation :

$$(m+1)x^2 - \frac{x}{m} - (m-1) = 0 \quad (E)$$

(c'est à dire l'équation $P_m(x) = 0$)

1. **CAS PARTICULIER :**
Résoudre l'équation $P_m(x) = 0$ dans le cas $m = -1$.

2. **RÉSOLUTION DE (E) :**
On suppose à partir de maintenant que $m \neq -1$.

a) Calculer le discriminant de (E) en fonction de m et l'écrire sous la forme $\left(\frac{A}{B}\right)^2$ où A et B sont des réels qui dépendent de m .
(Indication : pour le numérateur, on pourra reconnaître une identité remarquable).

b) Déterminer, en fonction de m , l'ensemble des solutions de l'équation (E). On simplifiera les résultats le plus possible.

3. **ÉTUDE DU SIGNE DE $P_m(x)$:** On suppose toujours dans cette question que $m \neq -1$.

a) Soient $x_1 = \frac{1-m}{m}$ et $x_2 = \frac{m}{m+1}$.

On pose $f(m) = x_1 - x_2$. Déterminer en fonction du réel m le signe de $f(m)$.
(on n'hésitera pas à faire un tableau de signe...)

b) En déduire, en fonction de m , l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tel que $P_m(x) \geq 0$.
On procèdera à une disjonction de cas selon m pour les 4 cas possibles.

1. Si $m = -1$, $P_m(x) = 0$ devient une équation du premier degré :

$$x + 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = -2}$$

2. a) On obtient $\Delta = \frac{1}{m^2} + 4(m+1)(m-1) = \frac{4m^4 - 4m^2 + 1}{m^2}$

On repère une identité remarquable au numérateur :

$$\Delta = \frac{4(m^2 - \frac{1}{2})^2}{m^2}$$

Ce qui constitue bien la forme demandée.

Remarquez qu'on peut également écrire :

$$\Delta = \frac{4(m - \frac{1}{\sqrt{2}})^2(m + \frac{1}{\sqrt{2}})^2}{m^2}$$

b) D'après le calcul précédent, on a $\Delta \geq 0$ quel que soit m , avec $\sqrt{\Delta} = \frac{2m^2-1}{m}$ ou $-\frac{2m^2-1}{m}$. Dans tous les cas, on obtient deux racines, confondues lorsque $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $m = -\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$x = \frac{\frac{1}{m} + \frac{2m^2-1}{m}}{2(m+1)} = \frac{m}{m+1} \text{ ou } x = \frac{\frac{1}{m} - \frac{2m^2-1}{m}}{2(m+1)} = \frac{1-m}{m}$$

$$(E) \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{m}{m+1}, \frac{1-m}{m} \right\}$$

3. a) On met sur le même dénominateur, et il vient, :

$$f(m) = \frac{1-m}{m} - \frac{m}{m+1} = \frac{1-2m^2}{m(m+1)}$$

Un tableau de signe rapide donne alors que :

$$f(m) \leq 0 \text{ pour } m \in]-\infty, -1[\cup \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right[\cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty \right[,$$

$$\text{et } f(m) \geq 0 \text{ pour } m \in \left] -1, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \cup \left] 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

b) L'ensemble des x tel que $P_m(x) \geq 0$ dépend des racines du polynôme étudié précédemment. On sait qu'il va être du signe de $m+1$ à l'extérieur des racines : reste à repérer ce qu'est "l'extérieur des racines", c'est à dire laquelle des deux racines est la plus petite.. et combiner ça avec le signe de $m+1$!

Il y a 4 cas à distinguer.

1er cas : Si $m = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

C'est le cas de racine double : le polynome étudié avec (E) est du signe de $m+1$.

Dans ces deux cas, $m+1 \geq 0$ donc $P_m(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2eme cas : Si $m < -1$:

D'après l'étude sur $f(m)$ effectuée précédemment, on a $\frac{m-1}{m} + \frac{m}{m+1} > 0$, donc

$\frac{m}{m+1} > \frac{1-m}{m}$ et comme $m+1 < 0$, c'est la partie "entre les racines" qui nous intéresse, d'où :

$$P_m(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1-m}{m}, \frac{m}{m+1} \right]$$

3eme cas : si $m \in \left] -1, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \cup \left] 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$

Alors $m+1 > 0$ et $\frac{m}{m+1} > \frac{1-m}{m}$ et l'ensemble qui nous intéresse est l'extérieur des racines :

$$P_m(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\infty, \frac{1-m}{m} \right] \cup \left[\frac{m}{m+1}, +\infty \right[$$

4eme cas : Si $m \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right[\cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty \right[$

Alors $m+1 > 0$ et $\frac{m}{m+1} < \frac{1-m}{m}$, et on a enfin :

$$P_m(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\infty, \frac{m}{m+1} \right] \cup \left[\frac{1-m}{m}, +\infty \right[$$