

## Programme de colle S3

### Notions au programme

- **Révisions d'analyse** : calcul asymptotique, avec en particulier : équivalents usuels, développements limités usuels, échelle de comparaison des suites ; calcul d'équivalents et de  $o$ .
- **Chapitre 1, Séries numériques** : en totalité.
- **Chapitre 2, Compléments de calcul matriciel** : §I Trace d'une matrice ; §II Polynômes de matrices et d'endomorphismes : jusqu'à §II.3, étude des inverses.

### Démonstrations à connaître

#### Étage 1 / Poussin

- [Ch2 §I] La trace est une application linéaire.
- [Ch1 §VI.2 P1] Les intégrales de Wallis sont décroissantes et minorées par 0
- [Ch1 §VI.2 P2] Relation de récurrence des intégrales de Wallis :

$$\forall n \in \mathbb{N} : W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

#### Étage 2 / Poulet

Le programme Poussin, ainsi que :

- [Ch2 §I] Trace d'un produit de matrices.
- [Ch1 §VI.2 P3] Formule explicite des intégrales de Wallis
- [Ch1 §VI.3] Fin de la preuve de la formule de Stirling :  
« Dans le lemme de Moivre, la constante vaut  $\sqrt{2\pi}$ . »

#### Étage 3 / Super-Poulet

Les programmes Poussin et Poulet, ainsi que :

- [Ch1 §III.4] Nature des séries de Riemann

- [Ch1 §IV.1] Lemme de Moivre :  
la suite  $(u_n)_{n \geq 1} := \left( \frac{n!}{\sqrt{n} (n/e)^n} \right)_{n \geq 1}$  converge vers une constante  $K > 0$ .
- [Ch1 §IV.4] Règle de d'Alembert
- [Ch1 §IV.1] Théorème fondamental des séries absolument convergentes

### Exercices à savoir refaire

#### Compléments de calcul matriciel

- [Exercice 4] Polynôme de l'endomorphisme de dérivation sur  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- [Exercice 7] Recherche de polynômes annulateurs d'une matrice donnée
- [Exercice 9] Inversibilité d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur

### Compétences attendues

#### Calcul asymptotique

- Connaître les équivalents usuels et les développements limités usuels [→ TDrév1/2 et 11]
- Prouver qu'une suite est équivalente à une constante non nulle [→ TDrév1/3]
- Effectuer un changement de variable dans un équivalent ou un développement asymptotique [→ TDrév1/4]
- Distinguer les suites infiniment petites des suites infiniment grandes et des suites convergeant vers une constante non nulle [→ TDrév1/6]
- Placer des suites sur une échelle de comparaison graphique [→ TDrév1/7]
- Calculer un équivalent en décomposant le problème en blocs indépendants qui se multiplient, se divisent et sont élevés à une puissance fixe [→ TDrév1/5]
- Calculer l'équivalent d'une somme en évaluant le poids relatif des termes [→ TDrév1/8]
- Montrer qu'une expression  $u_n$  est négligeable devant  $\frac{1}{n^\alpha}$  / que  $\frac{1}{n}$  est négligeable devant  $u_n$  en utilisant la « règle du  $n^\alpha$  » [→ §IV.2]

#### Séries numériques

- Maîtriser la nature des objets relatifs à l'étude des séries [→ §I, §II.1] :

|                             |                                                                    |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| Série                       | $\sum_{n \geq n_0} u_n$                                            |
| Terme général               | $(u_n)_{n \geq n_0}$                                               |
| Terme de rang $n$           | $u_n$                                                              |
| Somme partielle de rang $n$ | $S_n := \sum_{k=n_0}^n u_k$                                        |
| Somme de la série           | $S := \sum_{k=n_0}^{\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ |
| Reste de rang $n$           | $R_n := S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$                      |

- Prouver qu'une série est grossièrement divergente [→ §I.2, exo 3]
- Prouver la convergence d'une série en étudiant la limite de ses sommes partielles [→ exo 1, §II.2, exo 6 Q3]
- Connaître les séries usuelles : harmonique, géométriques exponentielles, de Riemann [→ §I.3, §III.4]
- Envisager un reste de série convergente comme différence entre somme et somme partielle [→ §II.1/déf.] ou comme somme d'une série [→ §II.1/propr.]; savoir qu'un reste de série convergente tend toujours vers 0.
- Reconnaître une série télescopique; en déduire la nature et la somme éventuelle de la série [→ §II.2, exo 5]
- Étudier la limite d'une suite en étudiant la nature de la série télescopique associée [→ §II.2 (principe), §VI.1 (application)]
- Utiliser la linéarité de la sommation **soigneusement** pour étudier la nature d'une série et sa somme éventuelle [→ §II.3, exo 6 et 7]
- Mobiliser les théorèmes de comparaison pour étudier la nature d'une série; **toujours essayer en premier la comparaison par équivalents** [→ §IV.3 (bilan), exos 8, 9, 12, 13]
- Conjecturer une relation de domination pertinente pour prouver la nature d'une série en s'aidant d'une échelle de comparaison graphique [→ exos 14, 15]
- Étudier la nature d'une série à termes positifs en étudiant le caractère majoré ou non de ses sommes partielles [→ §III.1 (principe), exo 11 Q1 (application)]
- Prouver qu'une série à termes quelconques est convergente en montrant son absolue convergence [→ §IV.1, exo 12]
- Mobiliser la règle de d'Alembert sur les séries appropriées (à termes strictement positifs, à structure multiplicative) pour étudier la nature d'une série [→ §IV.4, exo 16]
- Mobiliser la méthode des rectangles (comparaison série/intégrale) afin de déterminer : la nature d'une série, un équivalent de ses sommes partielles en cas de divergence, un équivalent de ses restes en cas de convergence

[→ §III.3, exos 10 et 11]

- Justifier qu'une série est alternée [→ §IV.5, exemples sous la déf.]
- Appliquer le critère spécial des séries alternées (CSSA) en listant correctement les hypothèses [→ §IV.5]; mobiliser toutes ses conclusions et pas seulement la convergence de la série [→ exo 17].
- Calculer le produit de Cauchy de deux séries [→ exo 18]
- Calculer la somme d'un produit de Cauchy de deux séries **absolument convergentes** [→ exo 19]
- Connaître la formule de Stirling [→ §VI.1]  
L'exploiter pour étudier la nature d'une série [→ exo 20]

### Compléments de calcul matriciel

- Mobiliser les propriétés formelles de la trace [→ §I]
- Connaître l'expression formelle des coefficients d'un produit de matrices [→ §I : **preuve de**  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ ]
- Écrire correctement un polynôme de matrice ou d'endomorphisme **sans oublier l'identité**. [→ §II.1, exo 3]
- Maîtriser le formalisme nécessaire aux polynômes d'endomorphismes [→ exo 4, exo 8 Q2]
- Exploiter un polynôme annulateur pour prouver qu'une matrice est inversible, et exprimer son inverse comme combinaison linéaire des premières puissances de la matrice [→ exo 9]