

Devoir sur table de mathématiques n° 1

jeudi 2 octobre 2025
4 heures · 12h45-16h45

- Les téléphones portables, montres connectées et calculatrices sont interdits.
- Toute communication et tout échange de matériel entre étudiant-e-s sont interdits. Les stylos à friction, le correcteur blanc et le crayon de papier également.
- **Traitez les questions dans l'ordre.** Vous pouvez laisser un blanc si vous pensez revenir à la question plus tard.
- **Encadrez les réponses au fur et à mesure de la rédaction.**
- Sauf indication contraire, **une réponse non justifiée ne rapporte pas de point.**
- Le soin apporté à la rédaction mathématique, à la qualité de l'orthographe et de la présentation seront pris en compte dans la notation. Ils occasionneront des pénalités pouvant aller jusqu'à -10% de la note.

Les défauts suivants seront notamment pris en compte :

- ▶ **Mauvais usage des connecteurs mathématiques** : $\forall$, $\exists$ ailleurs que devant une formule, confusions entre $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, « donc » etc.
- ▶ **Mauvais usage des parenthèses** dans les formules de mathématiques.
- ▶ **Soin général** : écriture peu lisible, hors des lignes, dans la marge, ratures.
- ▶ **Orthographe** : majuscules, accents, ponctuation absents, fautes d'orthographe grossières ou trop nombreuses.
- ▶ **Absence de rédaction** : formules déconnectées du raisonnement, absence de connecteurs logiques.
- ▶ **Abréviations abusives.**

Connaissance du cours

Commencez par répondre aux questions suivantes en 1 heure maximum. Cette partie du devoir sera ramassée à 13h45.

- 1) Déterminer la nature des séries :

$$\sum_{n \geq 1} u_n := \sum_{n \geq 1} \frac{\tan(1/\sqrt{n})}{\sqrt{n} + \ln^2(n)} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} v_n := \sum_{n \geq 1} \frac{\ln^4(n)}{n\sqrt{n}}.$$

- 2) Soit la série $\sum_{n \geq 1} u_n := \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^{3/4}}$.

- Cette série est-elle convergente ? absolument convergente ?
- Que dire de sa somme ? de ses restes ?

- 3) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\sum_{n \geq 0} u_n := \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} a^{-n}$.

- Déterminer la nature de cette série lorsque $a \neq 4$.
- À l'aide de la formule de Stirling, traiter le cas $a = 4$.

- 4) Soit $q \in \mathbb{C}$ un paramètre fixé.

- Calculer le produit de Cauchy de la série $\sum_{n \geq 0} u_n := \sum_{n \geq 0} q^n$ par elle-même.
- Suivant la valeur de q , que dire de la nature et des sommes de ces séries ?

- 5) Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E .

Relier, avec $\Rightarrow$ ou $\Leftarrow$, chacune des 6 affirmations suivantes :

- | | |
|--|--|
| (P1) $\text{Card}(\mathcal{F}) = n$ | (P4) $\text{Card}(\mathcal{F}) \neq n$ |
| (P2) $\text{Card}(\mathcal{F}) \leq n$ | (P5) $\text{Card}(\mathcal{F}) < n$ |
| (P3) $\text{Card}(\mathcal{F}) \geq n$ | (P6) $\text{Card}(\mathcal{F}) > n$ |

à une des affirmations concernant la famille $\mathcal{F}$:

- $\mathcal{F}$ est libre
- $\mathcal{F}$ est génératrice de E
- $\mathcal{F}$ est une base de E
- $\mathcal{F}$ est liée
- $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice de E
- $\mathcal{F}$ n'est pas une base de E

- 6) Soit $n \geq 3$ un entier. Déterminer le rang de la matrice :

$$M_n := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

- 7) Appliquer la méthode du miroir de Gauss à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

pour en calculer l'inverse.

- 8) a. Énoncer le théorème d'interpolation de Lagrange.

On interpole désormais aux points $a = -1$, $b = 0$ et $c = 1$.

- Donner l'expression factorisée des polynômes interpolateurs de Lagrange aux points a, b, c .
- Déterminer l'équation $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ de l'unique parabole passant par les points $A = (-1, 2)$, $B = (0, -1)$ et $C = (1, 3)$.

- 9) a. Rappeler la définition des matrices semblables.

- Donner 3 conditions nécessaires pour que deux matrices soient semblables.
- Les démontrer.

- 10) Récitez les développements limités usuels à l'ordre 3. Vous les organiserez en familles et indiquerez les liens qui les relient entre eux. Il y en avait 12 sur la feuille de révision.

La suite du devoir doit être rédigée sur une copie séparée (avec sa propre en-tête)

Exercice 1

Suites récurrentes couplées

On considère trois suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par récurrence :

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \in \mathbb{R} \\ b_0 = \beta \in \mathbb{R} \\ c_0 = \gamma \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n + c_n \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n + c_n \\ c_{n+1} = a_n + b_n + 2c_n \end{cases}$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on introduit la matrice-colonne :

$$V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

- 1) a. Donner une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_{n+1} = AV_n.$$

- b. Démontrer par une récurrence soignée que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n = A^n V_0.$$

- 2) a. Démontrer que la matrice A admet un unique polynôme annulateur P unitaire de degré 2.

En cas d'échec : demandez la réponse pour continuer.

- b. Montrer que la matrice A est inversible par 2 méthodes différentes.

- c. À l'aide d'une division euclidienne de polynômes, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n est combinaison linéaire de A et de I_3 .

- d. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression des termes a_n , b_n et c_n en fonction de α , β , γ et n .

- 3) a. Démontrer que la matrice A est semblable à la matrice :

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- b. Donner, en justifiant votre réponse, une matrice $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P D P^{-1}.$$

- c. Calculer la matrice P^{-1} .

- d. À l'aide de ce qui précède, calculer les coefficients de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Développement asymptotique de la série harmonique

Pour tout entier naturel n dans $\mathbb{N}^*$, on note :

$$h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad \delta_n = h_n - \ln(n).$$

On considère les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2 : \quad u_n = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right);$$

$$\forall n \geq 1 : \quad v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

- 1) a. Déterminer le domaine de définition de la fonction

$$f : x \mapsto x + \ln(1 - x).$$

- b. Préciser son développement limité à l'ordre 2 en 0.
c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quel est le signe de u_n ?
d. Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente.

- 2) a. Étudier la fonction $g : x \mapsto x - \ln(1 + x)$ sur $[0, 1]$.
b. Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ est convergente.

- 3) a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $v_n - u_n$ en fonction de n .

- b. En déduire une expression de $\sum_{k=1}^n (v_k - u_k)$ en fonction de n , pour tout entier $n \geq 3$.

- c. Montrer que les suites $\left(\sum_{k=1}^n v_k\right)_{n \geq 1}$ et $\left(\sum_{k=1}^n u_k\right)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

- d. Qu'en déduit-on concernant $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} v_n$?

Dans la suite de l'exercice, on note γ la somme des séries $\sum_{n \geq 1} v_n$ et $\sum_{n \geq 1} u_n$.

- 4) Démontrer que $\gamma \in]0, 1[$.

- 5) a. Justifier que la suite $(\delta_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

- b. Démontrer que la suite $(\delta_n)_{n \geq 1}$ est convergente, et que sa limite vaut γ .

Indication : exprimer les sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ en fonction des termes de la suite $(\delta_n)_{n \geq 1}$.

- 6) a. Justifier l'existence, pour tout entier $n \geq 1$, de :

$$s_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

- b. À l'aide de la méthode des rectangles, déterminer un encadrement de s_n .

- c. En déduire un équivalent simple de s_n .

- 7) Soit $(w_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels qui converge vers 0. On suppose qu'il existe une constante $\ell > 0$ telle que :

$$w_{n+1} - w_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ell}{n^2}.$$

- a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

Justifier l'existence de la somme $\sum_{k=n}^{\infty} (w_{k+1} - w_k)$ et préciser sa valeur.

- b. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$ quelconque.

Justifier qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall k \geq n_0 : \quad (1 - \varepsilon) \frac{\ell}{k^2} \leq w_{k+1} - w_k \leq (1 + \varepsilon) \frac{\ell}{k^2}.$$

- c. En déduire que, pour tout entier $n \geq n_0$:

$$(1 - \varepsilon) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\ell}{k^2} \leq \sum_{k=n}^{\infty} (w_{k+1} - w_k) \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\ell}{k^2}.$$

- d. En déduire que : $w_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\ell \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

$$\text{puis que :} \quad w_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{\ell}{n}.$$

- 8) En appliquant le résultat de la question 7 à une suite $(w_n)_{n \geq 1}$ bien choisie, démontrer qu'il existe un nombre réel α (que l'on explicitera) tel que :

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$