

Corrigé du devoir surveillé n° 1

Connaissance du cours

1) • Nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n = \sum_{n \geq 1} \frac{\tan(1/\sqrt{n})}{\sqrt{n} + \ln^2(n)}$

Puisque $\begin{cases} \tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0, \end{cases} \quad \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}.$

En outre, $\sqrt{n} + \ln^2(n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{n}.$

Ainsi :

- $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1/\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n};$
- $\forall n \geq 1, \frac{1}{n} \geq 0;$
- La série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Par théorème de comparaison, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge.

• Nature de la série $\sum_{n \geq 1} v_n = \sum_{n \geq 1} \frac{\ln^4(n)}{n \sqrt{n}}$

Soit $\alpha \in]1, 3/2[$. Alors :

$$n^\alpha \times v_n = \frac{\ln^4(n)}{n^{3/2-\alpha}} \underset{n \rightarrow \infty}{\xrightarrow{CC}} 0 \quad \text{car } 3/2 - \alpha > 0.$$

Ainsi :

- $v_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right);$
- $\forall n \geq 1, \frac{1}{n^\alpha} \geq 0;$
- la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge car $\alpha > 1.$

Par théorème de comparaison, $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge (absolument).

2) Soit la série $\sum_{n \geq 1} u_n = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^{3/4}}.$

a. Puisque $\sum_{n \geq 1} |u_n| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/4}}$, série de Riemann divergente **puisque** $3/4 \leq 1$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ n'est pas absolument convergente.

Toutefois, elle converge par le critère spécial des séries alternées (CSSA) :

- $\sum_{n \geq 1} u_n$ est bien alternée car $\frac{1}{n^{3/4}} \geq 0$ pour tout $n \geq 1$;
- $|u_n| = \frac{1}{n^{3/4}}$ tend vers 0 en décroissant quand $n \rightarrow \infty$.

b. • Toujours par le CSSA, la somme de cette série est comprise entre 0 et son premier terme :

$$\frac{(-1)^1}{1^{3/4}} = -1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/4}} \leq 0.$$

• En outre, les restes R_n de cette série vérifient :

$$\forall n \geq 1, |R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{3/4}} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^{3/4}}.$$

De plus, R_n est du signe du premier terme de la somme ci-dessus : positif si n est impair, et négatif si n est pair.

3) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\sum_{n \geq 0} u_n = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} a^{-n}.$

a. Supposons que $a \neq 4$. Appliquons la règle de d'Alembert.

Notons que $\forall n \geq 0, u_n > 0$. De plus :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\binom{2n+2}{n+1} a^{-n-1}}{\binom{2n}{n} a^{-n}} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2 a^{n+1}} \times \frac{(n!)^2 a^n}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2 a} \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(2n) \times (2n)}{n^2 a} = \frac{4}{a} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{4}{a}. \end{aligned}$$

On en déduit la nature de la série :

- Si $0 < a < 4$, alors $4/a > 1$ et la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge **grossièrement**;
- Si $a > 4$, alors $4/a < 1$ et la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente.

b. Supposons que $a = 4$.

On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

On en déduit un équivalent du terme général :

$$u_n = \binom{2n}{n} 4^{-n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} 4^{-n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi(2n)} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} 4^{-n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Comme, de plus :

- $\forall n \geq 1, \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \geq 0$;
- La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ diverge (multiple de série de Riemann d'exposant $\alpha = 1/2 \leq 1$),

par théorème de comparaison, **la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est divergente quand $a = 4$.**

4) Soit $q \in \mathbb{C}$ et $\sum_{n \geq 0} u_n = \sum_{n \geq 0} q^n$.

a. Le produit de Cauchy de $\sum_{n \geq 0} u_n$ par elle-même est la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ dont le terme général est :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k} = \sum_{k=0}^n q^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^n q^n = (n+1)q^n.$$

Conclusion : Le produit de Cauchy de $\sum_{n \geq 0} u_n$ par elle-même est $\sum_{n \geq 0} w_n = \sum_{n \geq 0} (n+1)q^n$.

b. • Si $|q| < 1$, alors la série géométrique $\sum_{n \geq 0} u_n$ est **absolument convergente**. Par le théorème des produits de Cauchy, la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ l'est également, et on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right)^2 \text{ donc } \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right)^2 = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

• Si $|q| \geq 1$, la série géométrique $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

De plus, $|w_n| = (n+1)|q|^n$ tend vers $+\infty$ donc $(w_n)_{n \geq 0}$ ne tend pas vers 0 : la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ diverge grossièrement.

Dans ce cas, aucune des deux sommes de série n'existe.

5) Les implications suivantes sont vraies :

$$\begin{array}{lll} (P1) \iff (Q3) & (P2) \iff (Q1) & (P3) \iff (Q2) \\ (P4) \implies (Q6) & (P5) \implies (Q5) & (P6) \implies (Q4) \end{array}$$

6) Soit $n \geq 3$ et $M_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & n \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans cette matrice, $L_1 = L_n$ et $L_i = L_2$ pour tout $i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$.

Ainsi : $\text{rg}(M_n) = \text{rg}(L_1, L_2) = 2$, car les 2 colonnes restantes sont non colinéaires (grâce au 0 en position (2,2), qui est bel et bien présent car $n \geq 3$).

Conclusion : $\forall n \geq 3, \text{rg}(M_n) = 2$.

✿ **Remarque.** On pouvait aussi remarquer que $C_n = n \cdot C_1$ et que $C_j = \frac{j}{2} \cdot C_2$ pour tout $j \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$.

7) Appliquons la méthode du miroir de Gauss pour inverser la matrice A :

$$\begin{array}{l} \left[A \mid I_3 \right] \\ = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \sim_L \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{Élimination } C_1 \downarrow \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \end{array} \\ \sim_L \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 15 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{Préparation } C_2 \downarrow \\ L_3 \leftarrow 5L_3 \end{array} \\ \sim_L \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -2 & 5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{Élimination } C_2 \downarrow \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array} \\ \sim_L \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -2 & 5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{Préparation } C_3 \uparrow \\ L_1 \leftarrow 3L_3 \end{array} \\ \sim_L \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 9 & 0 & -13 & -8 & 20 \\ 0 & 5 & 0 & -10 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -2 & 5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{Élimination } C_3 \uparrow \\ L_1 \leftarrow L_1 + 4L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3 \end{array} \\ \sim_L \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 9 & 0 & -13 & -8 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -2 & 5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{Préparation } C_2 \uparrow \\ L_2 \leftarrow L_2/5 \text{ car : } \text{pgcd}(5, -10, -5, 15) = 5 \end{array} \\ \sim_L \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 5 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -2 & 5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{Élimination } C_2 \uparrow \\ L_1 \leftarrow L_1 - 9L_2 \end{array} \end{array}$$

$$\sim_L \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 5 & 1 & -7 \\ 0 & 3 & 0 & -6 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 2 & -5 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{Pivot commun : } \text{ppcm}(3, 1, -3) = 3 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}$$

Conclusion : On obtient que la matrice A est inversible et que :

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -7 \\ -6 & -3 & 9 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

8) a. Théorème d'interpolation de Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^{n+1}$ **tous distincts**,
 $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ quelconques.

Alors il existe un **unique** polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\begin{cases} \deg(P) \leq n, \\ \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket : P(a_j) = b_j. \end{cases}$$

On interpole en $a = -1$, $b = 0$ et $c = 1$.

b. Les polynômes interpolateurs de Lagrange sont dans ce cas :

$$\begin{aligned} L_0(X) &= \frac{X(X-1)}{-1 \times -2} = \frac{1}{2}X(X-1), \\ L_1(X) &= \frac{(X+1)(X-1)}{1 \times -1} = -(X+1)(X-1), \\ L_2(X) &= \frac{(X+1)X}{2 \times 1} = \frac{1}{2}X(X+1). \end{aligned}$$

c. Le théorème d'interpolation dit qu'il existe un unique polynôme P de degré au plus 2 tel que $P(-1) = 2$, $P(0) = -1$ et $P(1) = 3$.

$$\begin{aligned} \text{Il s'agit du polynôme : } P(X) &= 2L_0(X) - L_1(X) + 3L_2(X) \\ &= X(X-1) + (X+1)(X-1) + \frac{3}{2}X(X+1) \\ &= \frac{7}{2}X^2 + \frac{1}{2}X - 1. \end{aligned}$$

Il y a donc une unique parabole passant par les trois points $A = (-1, 2)$, $B = (0, -1)$ et $C = (1, 3)$: elle a pour équation $y = \frac{7}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1$.

9) a. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (où $n \in \mathbb{N}^*$).

On dit que **A et B sont semblables (sur $\mathbb{K}$)** quand il existe une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que : $A = PBP^{-1}$.

b. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour que A et B soient semblables, il faut qu'elles aient même trace, même déterminant et même rang.

c. Supposons que A et B soient semblables. Alors il existe une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

- $\text{tr}(A) = \text{tr}(PBP^{-1}) = \text{tr}((PB)P^{-1}) = \text{tr}(P^{-1}(PB)) = \text{tr}(I_n B) = \text{tr}(B)$.
- $\det(A) = \det(PBP^{-1}) = \det(P) \cdot \det(B) \cdot \det(P^{-1}) = \det(P) \cdot \det(B) \cdot \frac{1}{\det(P)} = \det(B)$.
- Multiplier une matrice, à gauche ou à droite, par une matrice inversible ne change pas son rang. Puisque P et P^{-1} sont inversibles, B a même rang que PB , puis que $PBP^{-1} = A$.

10) Développements limités usuels à l'ordre 3

► Famille de $\frac{1}{1-x}$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)_{x \rightarrow 0}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)_{x \rightarrow 0}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)_{x \rightarrow 0}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^3)_{x \rightarrow 0}$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)_{x \rightarrow 0}$$

► Exposants : pour $\alpha \in \mathbb{R}$ une **constante** :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + o(x^3)_{x \rightarrow 0}$$

► Famille de l'exponentielle :

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)_{x \rightarrow 0}$$

$$\text{ch}(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)_{x \rightarrow 0}$$

$$\text{sh}(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)_{x \rightarrow 0}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)_{x \rightarrow 0}$$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)_{x \rightarrow 0}$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)_{x \rightarrow 0}$$

Exercice 1

Suites récurrentes couplées

On considère trois suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par récurrence :

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ b_0 = \beta \\ c_0 = \gamma \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n + c_n \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n + c_n \\ c_{n+1} = a_n + b_n + 2c_n \end{cases}$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on introduit la matrice-colonne : $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

1) a. Remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_n + b_n + c_n \\ a_n + 2b_n + c_n \\ a_n + b_n + 2c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A V_n$$

$$\text{si l'on introduit la matrice } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, démontrons les propriétés :

$$\mathcal{H}(n): V_n = A^n V_0.$$

* **Initialisation.** Pour $n = 0$: $V_n = V_0$ et $A^n V_0 = A^0 V_0 = I_3 V_0 = V_0$, donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.

* **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $\mathcal{H}(n)$ soit vraie.

Alors : $V_{n+1} = A V_n = A (A^n V_0) = (A \times A^n) V_0 = A^{n+1} V_0$, donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie également.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = A^n V_0$.

$$2) \text{ a. Un simple calcul de produit donne : } A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Considérons $P = X^2 + \alpha X + \beta \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire de degré 2 quelconque. Alors :

$$P(A) = 0_3 \iff A^2 + \alpha A + \beta I_3 = 0_3$$

$$\iff \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En identifiant les 9 coefficients des matrices, on obtient 9 équations dont seulement 2 sont distinctes. Alors :

$$P(A) = 0_3 \iff \begin{cases} 6 + 2\alpha + \beta = 0 \\ 5 + \alpha = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -5 \\ \beta = 4 \end{cases} \iff P = X^2 - 5X + 4.$$

Conclusion : La matrice A admet un unique polynôme annulateur unitaire et de degré 2 : le polynôme $P_0 := X^2 - 5X + 4$.

✿ **Remarque.**

- 1) Il est plus clair de choisir une notation différente pour l'inconnue et pour l'unique solution trouvée. Ci-dessus, l'inconnue est notée P et la solution est notée P_0 .
- 2) Sur cet exemple, on peut raisonner **par équivalences** car parmi les 9 équations, il y a 7 équations redondantes, copies conformes des 2 premières. On obtient ainsi **d'un seul coup l'existence et l'unicité** du polynôme P recherché.
- 3) Si on choisit de sélectionner 2 équations en ignorant les autres, l'équivalence $\iff$ devient une implication $\implies$. On obtient uniquement l'unicité à la fin de la résolution. Il faut ensuite montrer la réciproque $\impliedby$: cela consiste à vérifier que le polynôme P_0 est bien solution du problème en calculant $P_0(A)$.
- 4) On pouvait procéder par **analyse-synthèse**. Dans l'analyse, on suppose que P est solution, et on montre que nécessairement, $P = P_0$. Cela démontre l'**unicité** du polynôme cherché. Dans la synthèse, on vérifie que P_0 est bien solution.

b. • **1^{re} méthode :** grâce au polynôme annulateur. Puisque $P_0(A) = 0_3$:

$$A^2 - 5A + 4I_3 = 0_3 \quad \text{donc} \quad -A^2 + 5A = 4I_3, \quad \frac{1}{4}(-A + 5I_3) \times A = I_3$$

donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{4}(-A + 5I_3)$.

• **2^e méthode :** par le déterminant.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

donc la matrice A est inversible.

- 3^e méthode : par le rang.

$$\begin{aligned} \text{rg}(A) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 + \text{rg} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{2 colonnes non colinéaires}} \\ &= 1 + 2 = 3. \end{aligned}$$

Le rang de la matrice **carrée** A est maximal : cette matrice est donc inversible.

❖ **Remarque.** Il est inutilement coûteux d'utiliser le miroir de Gauss-Jordan si l'on veut juste prouver que la matrice est inversible, **sans calculer son inverse**.

c. Fixons $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Comme P n'est pas le polynôme nul, on peut poser la division euclidienne de X^n par P :

$$\exists! (Q_n, R_n) \in (\mathbb{R}[X])^2 / \begin{cases} X^n = P(X)Q_n(X) + R_n(X) & (*) \\ \deg(R_n) < \deg(P) = 2. \end{cases}$$

Comme le reste R_n est de degré au plus 1, on peut l'écrire $R_n = \alpha_n X + \beta_n$ pour un couple (α_n, β_n) de réels. En évaluant $(*)$ en la matrice A :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \underbrace{P(A)}_{=0_3} Q_n(A) + R_n(A) = R_n(A) = \alpha_n A + \beta_n I_3.$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n est combinaison linéaire de A et de I_3 .

d. Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = (a_n, b_n, c_n)$ et que $V_n = A^n V_0$, commençons par calculer A^n .

- Factorisons $P = X^2 - 5X + 4$: comme il admet 1 comme racine évidente et que l'autre racine est $4/1 = 4$, on a $P = (X - 1)(X - 4)$.
- On évalue $(*)$ en 1 et en 4 :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha_n + \beta_n = 1 \\ 4\alpha_n + \beta_n = 4^n \end{cases} & \text{donc} \quad \begin{cases} \alpha_n + \beta_n = 1 \\ -3\beta_n = -4 + 4^n \end{cases} \\ \text{d'où} \quad \begin{cases} 3\alpha_n = -1 + 4^n \\ -3\beta_n = -4 + 4^n \end{cases} & \text{d'où} \quad \begin{cases} \alpha_n = \frac{1}{3}(-1 + 4^n) \\ \beta_n = \frac{1}{3}(-4 + 4^n) \end{cases} \end{aligned}$$

On peut ainsi expliciter A_n :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad A^n = \frac{1}{3} \left((-1 + 4^n)A + (-4 + 4^n)I_3 \right).$$

Mettons en facteur 4^n :

$$A^n = \frac{1}{3} \left((-A + 4I_3) + 4^n \cdot (A - I_3) \right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + 4^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2+4^n & -1+4^n & -1+4^n \\ -1+4^n & 2+4^n & -1+4^n \\ -1+4^n & -1+4^n & 2+4^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- On en déduit les expressions des 3 suites :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = V_n = A^n V_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2+4^n & -1+4^n & -1+4^n \\ -1+4^n & 2+4^n & -1+4^n \\ -1+4^n & -1+4^n & 2+4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Reste à identifier les 3 coefficients des matrices-colonne.

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{3} \left((2+4^n)\alpha + (-1+4^n)\beta + (-1+4^n)\gamma \right) \\ b_n = \frac{1}{3} \left((-1+4^n)\alpha + (2+4^n)\beta + (-1+4^n)\gamma \right) \\ c_n = \frac{1}{3} \left((-1+4^n)\alpha + (-1+4^n)\beta + (2+4^n)\gamma \right). \end{cases}$$

- 3) a. Pour montrer que la matrice A est semblable à la matrice $D := \text{diag}(1, 1, 4)$, nous allons montrer que A et D représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

On introduit $f : V \in \mathbb{R}^3 \mapsto AV \in \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A : alors A est la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ de $\mathbb{R}^3$.

Cherchons une base $\mathcal{B} = (V_1, V_2, V_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans cette base soit D .

- **Analyse.** Supposons que la base $\mathcal{B}$ convienne. En lisant les colonnes de la matrice D , on obtient :

$$\begin{cases} f(V_1) = V_1 \\ f(V_2) = V_2 \\ f(V_3) = 4V_3 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} AV_1 = V_1 \\ AV_2 = V_2 \\ AV_3 = 4V_3. \end{cases}$$

- **Synthèse.** On ne suppose plus que $\mathcal{B}$ convient, et on la construit.

* Résolvons l'équation $AV = V$ d'inconnue $V \in \mathbb{R}^3$. Elle est équivalente à $(A - I_3)V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Or :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad C_1 - C_2 = C_1 - C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} :$$

les vecteurs $V_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ conviennent.

❖ **Remarque.**

- 1) On pouvait résoudre ces systèmes en écrivant $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et en résolvant le système linéaire de façon « classique ». **C'est plus long !**
- 2) Inutile de résoudre 2 fois la même équation $AV = V$!
On la résout une seule fois, et on en choisit 2 solutions particulières V_1 et V_2 .

* De même pour $AV = 4V$:

$$A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad C_1 + C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $V_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

* Reste à prouver que $\mathcal{B} := (V_1, V_2, V_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Comme $\text{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, **$\det(\mathcal{B})$ existe** et :

$$\det(\mathcal{B}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = +1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0.$$

♣ **Attention !** Beaucoup d'imprécisions subsistent quant au déterminant d'une famille de vecteurs.

- 1) **Le déterminant ne sert pas à prouver qu'une famille est libre.**
Il sert uniquement à prouver qu'une famille est une **base**.
- 2) L'hypothèse $\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{R}^3)$ sert à garantir l'existence du déterminant. Dans ce contexte, on ne cherche pas un argument de liberté : on calcule le déterminant.
- 3) Un déterminant de famille de vecteurs se calcule **relativement à une base** (ici $\mathcal{B}_{\text{can}}$). C'est ce qui permet de se déterminer à un déterminant de matrice.

* $\mathcal{B}$ est donc une base de $\mathbb{R}^3$ où la matrice de f est :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = D.$$

Conclusion : Les matrices A et D représentent un même endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$, donc elles sont semblables dans $\mathbb{R}$.

b. Pour l'endomorphisme f de la question précédente :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(f) = A, \quad \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = D \quad \text{et} \quad P := P_{\mathcal{B}_{\text{can}} \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

donc par le théorème de changement de bases : $A = P D P^{-1}$.

c. On inverse la matrice P par la méthode du miroir de Gauss :

$$\begin{aligned} & \left[P \mid I_3 \right] \\ &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\sim_L \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & \text{Élimination } C_1 \downarrow \\ & & & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ &\sim_L \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] & \text{Élimination } C_2 \downarrow \\ & & & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ &\sim_L \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] & \text{Préparation } C_3 \uparrow \\ & & & L_1 \leftarrow 3 \cdot L_1 \\ & & & L_2 \leftarrow 3L_2 \\ &\sim_L \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] & \text{Élimination } C_3 \uparrow \\ & & & L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ & & & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ &\sim_L \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] & \text{Élimination } C_2 \uparrow \\ & & & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

d. On déduit de ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} A^n &= (P D P^{-1})^n = (P D P^{-1}) \times (P D P^{-1}) \times \dots \times (P D P^{-1}) = P D^n P^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4^n \\ -1 & 0 & 4^n \\ 0 & -1 & 4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2+4^n & -1+4^n & -1+4^n \\ -1+4^n & 2+4^n & -1+4^n \\ -1+4^n & -1+4^n & 2+4^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

d'après E3A MP 2018 épr. 1

Exercice 2

Développement asymptotique de la série harmonique

Pour tout entier naturel n dans $\mathbb{N}^*$, on note :

$$h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad \delta_n = h_n - \ln(n).$$

On considère les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par :

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2 : u_n = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right); \\ \forall n \geq 1 : v_n &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

1) a. On considère $f : x \mapsto x + \ln(1-x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque :

$$x \in \mathcal{D}_f \iff \ln(1-x) \text{ existe} \iff 1-x > 0 \iff x < 1.$$

Conclusion : $\mathcal{D}_f =]-\infty, 1[$.

♣ **Attention !** Ne pas confondre le vocabulaire concernant f (la fonction) et $f(x)$ (l'image d'un réel x par f). Les expressions « f est définie » ou « f existe » ne sont pas pertinentes ; remarquer qu'elles ne dépendent pas de x . Elles ne sont donc pas équivalentes à « f est définie en x », « $f(x)$ existe » ou « $\ln(1-x)$ existe » qui, elles, sont correctes et signifient que x se trouve dans le domaine de définition de la fonction f .

b. On sait que : $\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$.

Puisque $-x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$, il peut jouer le rôle de u :

$$\ln(1-x) = (-x) - \frac{1}{2}(-x)^2 + o((-x)^2) = -x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

Conclusion : $f(x) = x + \ln(1-x) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.

✿ **Remarque.** On doit obligatoirement partir d'un DL **usuel**, qui est officiellement au programme. Ce n'est pas le cas de $\ln(1-x)$, qu'on ne peut pas énoncer sans preuve. On pouvait aussi primitiver le DL usuel de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, en soulignant la valeur en 0 de la primitive : $-\ln(1-0) = 0$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

* **Si $n = 1$:** $u_1 = 1 > 0$.

* **Si $n = 2$:** $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ (remarquons que, dans ce cas, $\frac{1}{n} \in]0, 1[\subset \mathcal{D}_f$).

Étudions la fonction f sur $[0, 1]$. f est dérivable sur cet intervalle par opérations sur les fonctions dérivables et on a :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad f'(x) = 1 + \frac{1}{1-x} \times \frac{d(1-x)}{dx} = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} \leq 0,$$

avec une annulation pour $x = 0$ seulement.

x	0	$1/n$	1
$f'(x)$	0	—	
f	0	u_n	

Puisque $\frac{1}{n} \in]0, 1]$, on en tire que $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right) < 0$.

Conclusion : $u_1 > 0$ et $\forall n \geq 2, u_n < 0$.

♣ **Attention !** La question précédente donne $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.

Cela permet de dire que u_n et $-\frac{1}{2n^2}$ ont le même signe **mais seulement au voisinage de l'infini** (pour les suites, cela signifie à partir d'un certain rang). On dit qu'un équivalent est une **notion locale**. D'ailleurs, u_1 n'est pas strictement positif ici.

d. Comme $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, par changement de variable dans le DL de la question 1b, on obtient ❶ $f\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$ donc $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$; de plus ❷ $-\frac{1}{2n^2} < 0$ pour tout $n \geq 1$; et ❸ la série $\sum_{n \geq 1} \frac{-1}{2n^2}$ est convergente (multiple de la série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$).

Par le théorème de comparaison pour les séries, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est également convergente.

2) a. Soit $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x - \ln(1+x).$$

Pour tout $x \in [0, 1]$, $1+x > 0$ donc $\ln(1+x)$ existe : la fonction g est bien définie. Elle est dérivable sur $[0, 1]$ par opérations sur les fonctions dérivables, et :

$$\forall x \in [0, 1], \quad g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} \times \frac{d(1+x)}{dx} = \frac{x}{1+x} \geq 0$$

avec une unique annulation en $x = 0$.

Conclusion : On peut dresser le tableau de variations de g :

x	0	1
$g'(x)$	0	+
g	0	$1 - \ln 2$

❖ **Remarque.**

- Étudier une fonction sur un intervalle consiste à étudier : son domaine de définition ; sa périodicité et parité/imparité éventuelles ; sa régularité (où est-elle dérivable ? continue ?) ; ses variations, ses extrema locaux et ses limites aux bornes de son domaine. Les 3 dernières informations se résument bien par un **tableau de variation**.
- Dans ce contexte, **il n'est pas utile de détailler la preuve que la fonction est dérivable.**
- L'expression « dérivable et continue » est à bannir.**
Elle trahit que vous ne maîtrisez pas l'implication : dérivable $\implies$ continue.
Dites seulement « dérivable ».

b. On procède de même que pour u_n . Remarquons que $v_n = g\left(\frac{1}{n}\right)$ pour tout $n \geq 1$; on cherche un équivalent de g en 0 :

$$g(x) = x - \ln(1+x) = x - \left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$$

et comme $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, par changement de variable :

$$v_n = g\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}. \quad \textcircled{1}$$

De plus, $\textcircled{2} \frac{1}{2n^2} \geq 0$ pour tout $n \geq 1$, et $\textcircled{3} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n^2}$ est convergente.

Conclusion : Par le théorème de comparaison pour les séries, la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ est convergente.

3) a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

- * Si $n = 1$, alors : $v_n - u_n = v_1 - u_1 = (1 - \ln 2) - 1 = -\ln(2)$.
- * Si $n \geq 2$, alors :

$$\begin{aligned} v_n - u_n &= \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= -\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= -\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ &= -\ln(n+1) + 2\ln(n) - \ln(n-1). \end{aligned}$$

♣ **Attention !** Presque tout le monde oublie de faire un cas particulier pour $n = 1$. Cela aura des conséquences fâcheuses dans la question suivante... Cette situation illustre bien qu'une expression a toujours un **domaine de validité** : il faut s'assurer que les variables se trouvent bien dedans avant de l'utiliser.

b. Prenons maintenant un entier $n \geq 3$. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (v_k - u_k) &= (v_1 - u_1) + \sum_{k=2}^n (v_k - u_k) \\ &= -\ln(2) + \sum_{k=2}^n \left(-\ln(k+1) + 2\ln(k) - \ln(k-1)\right) \\ &= -\ln(2) + \sum_{k=2}^n \left(\underbrace{\ln(k)}_{a_k} - \underbrace{\ln(k+1)}_{a_{k+1}}\right) + \sum_{k=2}^n \left(\underbrace{\ln(k)}_{a_k} - \underbrace{\ln(k-1)}_{a_{k-1}}\right) \end{aligned}$$

Les deux sommes se télescopent et on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (v_k - u_k) &= -\ln(2) + (\ln(2) - \ln(n+1)) + (\ln(n) - \ln(1)) \\ &= \ln(n) - \ln(n+1). \end{aligned}$$

♣ **Attention !** Une somme télescopique doit faire intervenir deux termes **qui se suivent** d'une **même suite** (a_k).

La somme $\sum_{k=2}^n (\ln(k^2) - \ln(k^2 - 1))$ n'est **pas** télescopique :

si on pose $a_k := \ln(k^2)$, alors $a_{k-1} = \ln((k-1)^2) \neq \ln(k^2 - 1)$.

c. Introduisons les deux suites $(S_n)_{n \geq 1} := \left(\sum_{k=1}^n v_k\right)_{n \geq 1}$ et $(T_n)_{n \geq 1} = \left(\sum_{k=1}^n u_k\right)_{n \geq 1}$.

Montrons qu'elles sont adjacentes :

- * Pour tout $n \geq 1$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \leq 0$ (car $n+1 \geq 2$: question 1c)
donc la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est décroissante ;

* Pour tout $n \geq 1$, $T_{n+1} - T_n = v_{n+1} = g\left(\frac{1}{n+1}\right) \geq 0$ (car $\frac{1}{n+1} \in [0, 1]$: question 2a), donc la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ est croissante ;

$$\begin{aligned} * \forall n \geq 1, \quad T_n - S_n &= \sum_{k=1}^n (v_k - u_k) = \ln(n) - \ln(n+1) = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

d. Comme les suites $(S_n)_{n \geq 1}$ et $(T_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes, elles convergent vers une limite commune γ .

Or, il s'agit des sommes partielles des séries $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} v_n$; cela signifie que ces deux séries sont convergentes (on le savait déjà) et **qu'elles ont la même somme γ** .

Conclusion : Les séries $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} v_n$ convergent, et $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \gamma$.

Dans la suite de l'exercice, on note γ la somme des séries $\sum_{n \geq 1} v_n$ et $\sum_{n \geq 1} u_n$.

4) Comme $(S_n)_{n \geq 1}$ converge en décroissant vers γ et que $(T_n)_{n \geq 1}$ fait de même en croissant, on a notamment :

$$T_1 \leq \gamma \leq S_2 \quad \text{c.à.d.} \quad v_1 \leq \gamma \leq u_1 + u_2 \quad \text{donc} \quad 1 - \ln(2) \leq \gamma \leq 1 + u_2.$$

Mais $2 < e$, donc $\ln(2) < 1$, d'où $1 - \ln(2) > 0$;

et $u_2 < 0$ d'après la question 1c, donc $1 + u_2 < 1$.

Ainsi : $0 < 1 - \ln(2) \leq \gamma \leq 1 + u_2 < 1$.

Conclusion : $\gamma \in]0, 1[$.

5) a. Étudions le sens de variation de la suite $(\delta_n)_{n \geq 1} := (h_n - \ln(n))_{n \geq 1}$:

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, \quad \delta_{n+1} - \delta_n &= (h_{n+1} - \ln(n+1)) - (h_n - \ln(n)) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= u_{n+1} < 0. \quad (\text{question 1c}) \end{aligned}$$

Conclusion : La suite $(\delta_n)_{n \geq 1}$ est (strictement) décroissante.

b. Pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\delta_n = \delta_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\delta_{k+1} - \delta_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1} = u_1 + \sum_{k=2}^n u_k = \sum_{k=1}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \gamma.$$

Conclusion : La suite $(\delta_n)_{n \geq 1} = (h_n - \ln(n))_{n \geq 1}$ converge vers la constante d'Euler γ .

6) a. Fixons $n \geq 1$. La série de Riemann $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ est convergente car $\alpha = 2 > 1$.

Or, la nature d'une série ne dépend pas de ses termes initiaux, donc la série $\sum_{k \geq n} \frac{1}{k^2}$ est convergente également, et sa somme existe.

Conclusion : Pour tout $n \geq 1$, la somme $s_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ existe.

b. Fixons $n \geq 1$ et **estimons la somme $s_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}$** par la méthode des rectangles.

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$, donc :

$$\forall k \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket : \quad f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k).$$

Prenons $N > n$ quelconque. En sommant pour $k \in \llbracket n, N-1 \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{N-1} f(k+1) &\leq \int_n^N f(t) dt \leq \sum_{k=n}^{N-1} f(k) \\ \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2} &\leq \left[-\frac{1}{t}\right]_n^N \leq \sum_{k=n}^{N-1} \frac{1}{k^2} \\ \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} &\leq \frac{1}{n} - \frac{1}{N} \leq \sum_{k=n}^{N-1} \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

Quand $N \rightarrow +\infty$, **ces 3 termes ont une limite** (grâce à la question précédente pour les deux sommes). Par passage à la limite dans les inégalités larges :

$$s_n - \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \leq s_n \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{n} \leq s_n \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

✿ **Remarque.** Avant de vous lancer dans la méthode des rectangles, **fixez votre attention sur la somme que vous souhaitez estimer**. Cela vous indiquera entre quelles bornes sommer : attention à la borne de départ (ici n et non 1 !), et quand la borne d'arrivée est ∞ , il faut d'abord la remplacer par une borne finie $N > n$ puis passer soigneusement à la limite.

c. Dans l'encadrement précédent, les deux extrémités sont équivalentes à $\frac{1}{n}$. Par le théorème d'encadrement pour les équivalents, on en déduit que s_n également.

Conclusion : $s_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

7) Soit $(w_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels qui converge vers 0. On suppose qu'il existe une constante $\ell > 0$ telle que :

$$w_{n+1} - w_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ell}{n^2}.$$

a. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. La série $\sum_{k \geq n} (w_{k+1} - w_k)$ est une série télescopique associée à la suite $(w_k)_{k \geq 1}$: les deux sont donc de même nature.

Comme la suite $(w_k)_{k \geq 1}$ converge, cette série converge également ; de plus, sa somme vaut :

$$\sum_{k=n}^{\infty} (w_{k+1} - w_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (w_{k+1}) - w_n = -w_n.$$

❖ **Remarque.** Pour prouver la convergence de la série, on pouvait aussi procéder par théorème de comparaison puisque $w_{n+1} - w_n \sim \ell/n^2$; mais cette approche ne donne pas la somme de la série.

b. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$ quelconque. Puisque $w_{k+1} - w_k \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ell}{k^2}$, par définition des équivalents :

$$\frac{w_{k+1} - w_k}{\ell/k^2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1.$$

Par définition de la limite d'une suite, il existe un rang $n_0 \geq 1$ tel que :

$$\begin{aligned} \forall k \geq n_0 : \quad & \left| \frac{w_{k+1} - w_k}{\ell/k^2} - 1 \right| \leq \varepsilon \\ & 1 - \varepsilon \leq \frac{w_{k+1} - w_k}{\ell/k^2} \leq 1 + \varepsilon \quad \text{et comme } \ell/k^2 \geq 0 : \\ & (1 - \varepsilon) \frac{\ell}{k^2} \leq w_{k+1} - w_k \leq (1 + \varepsilon) \frac{\ell}{k^2}. \end{aligned}$$

c. Avec le rang n_0 de la question précédente, prenons $n, N \in \mathbb{N}$ tels que $n_0 \leq n \leq N$. En sommant les inégalités précédentes pour $k \in \llbracket n, N \rrbracket$:

$$(1 - \varepsilon) \sum_{k=n}^N \frac{\ell}{k^2} \leq \sum_{k=n}^N (w_{k+1} - w_k) \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=n}^N \frac{\ell}{k^2}.$$

Puisque les séries $\sum_{k \geq n} \frac{\ell}{k^2}$ et $\sum_{k \geq n} (w_{k+1} - w_k)$ sont convergentes, les 3 membres admettent une limite (finie) lorsque $N \rightarrow \infty$. En passant à la limite dans les inégalités larges :

$$(1 - \varepsilon) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\ell}{k^2} \leq \sum_{k=n}^{\infty} (w_{k+1} - w_k) \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\ell}{k^2}.$$

d. On a trouvé à la question 7a l'expression de la somme centrale ; on obtient :

$$(1 - \varepsilon) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\ell}{k^2} \leq -w_n \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\ell}{k^2}.$$

En divisant par $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\ell}{k^2} > 0$:

$$(1 - \varepsilon) \leq \frac{-w_n}{\ell \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}} \leq (1 + \varepsilon) \quad \text{donc} \quad \left| \frac{w_n}{-\ell \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}} - 1 \right| \leq \varepsilon.$$

Si l'on récapitule, on a démontré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 : \left| \frac{w_n}{-\ell \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}} - 1 \right| \leq \varepsilon ;$$

en d'autres termes : $\frac{w_n}{-\ell \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ dont on déduit, grâce à la

question 6c :

$$w_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\ell \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} = -\ell \cdot s_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{\ell}{n}.$$

8) Introduisons la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1 : w_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) - \gamma = \delta_n - \gamma.$$

On essaie de lui appliquer le résultat de la question 7.

* Tout d'abord, comme $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma$ d'après la question 5b, $w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

* Étudions la limite de $n^2 \times (w_{n+1} - w_n)$:

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \delta_{n+1} - \delta_n = (h_{n+1} - \ln(n+1)) - (h_n - \ln(n)) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= -\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Par le changement de variable $X \leftarrow \frac{1}{n}$ dans les développements limités :

$$\ln(1 + X) = X - \frac{1}{2}X^2 + o(X^2) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1 + X} = 1 - X + o(X), \quad \begin{matrix} X \rightarrow 0 \\ X \rightarrow 0 \end{matrix}$$

on obtient, quand $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= -\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}. \end{aligned}$$

Les hypothèses de la question 7 sont réunies, mais pour la suite $(-w_n)_{n \geq 1}$, avec $\ell = 1/2$. Le résultat de la question 7d s'applique :

$$-w_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2n} \quad \text{donc} \quad w_n = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)_{n \rightarrow \infty}$$

$$\begin{aligned} \text{et finalement :} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= \ln(n) + \gamma + w_n \\ &= \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)_{n \rightarrow \infty}. \end{aligned}$$