

Réduction d'endomorphismes et de matrices carrées

I Éléments propres

I. A Valeur propre d'un endomorphisme

Définition 1.1

Soit u un endomorphisme de E . Un scalaire λ est appelé **valeur propre** de u lorsqu'il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$.
Un tel vecteur est appelé **vecteur propre** de u associé à la valeur propre λ .

Remarque 1.2 : Sont équivalents :

- λ est une valeur propre de u ;
- $\text{Ker}(u - \lambda \cdot \text{id}) \neq \{0\}$;
- $u - \lambda \cdot \text{id}$ n'est pas injectif.

Remarque 1.3 : Un vecteur non nul x de E est un vecteur propre de u si et seulement si la droite vectorielle $\text{Vect}(x)$ est stable par u .

Notation : L'équation $u(x) = \lambda x$ est appelée **équation aux éléments propres**.

Exemples 1.4 : • Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres associés d'un projecteur non nul et différent de l'identité.

- Pour $E = \mathbb{K}[X]$ et $u : P \mapsto P'$, déterminer les valeurs propres et vecteurs propres associés de u .
- $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u : f \mapsto f'$.

I. B Sous-espaces propres

Définition 1.5

Soit u un endomorphisme de E et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u . On appelle **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ le sous-espace :

$$\text{Ker}(u - \lambda \cdot \text{id}) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}.$$

Remarques 1.6 : • Le sous-espace propre associé à λ est constitué des vecteurs propres associés à λ et du vecteur nul.

- Un sous-espace propre n'est jamais le sous-espace nul.

Théorème 1.7

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des valeurs propres de u distinctes. Alors les sous-espaces propres associés sont en somme directe :

$$\sum_{i=1}^r \text{Ker}(u - \lambda_i \cdot \text{id}) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(u - \lambda_i \cdot \text{id}).$$

Corollaire 1.8

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

II Éléments propres en dimension finie

Dans le reste du chapitre on suppose E de dimension finie.

II. A Spectre d'un endomorphisme en dimension finie

Définition 2.1

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **spectre** de u et on note $\text{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u .

Remarque 2.2 : Sont équivalents :

- λ est une valeur propre de u ;
- $u - \lambda \cdot \text{id}$ n'est pas un automorphisme ;
- $\det(u - \lambda \cdot \text{id}) = 0$.

Proposition 2.3

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $\dim(E) = n$, alors le spectre de u est de cardinal au plus n .

Remarque 2.4 : Autrement dit, un endomorphisme sur un espace vectoriel de dimension n a au plus n valeurs propres.

Proposition 2.5

Si deux endomorphismes u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v .

II. B Éléments propres d'une matrice carrée

Définition 2.6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Un scalaire λ est une **valeur propre de A** lorsqu'il existe une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulle telle que $AX = \lambda X$; une telle matrice est appelée **vecteur propre** de A associé à la valeur propre λ .
- On appelle **spectre de A** , et on note $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$, l'ensemble des valeurs propres de A .
- Pour toute valeur propre λ de A , on appelle **sous-espace propre** de A associé à λ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$: $\text{Ker}(A - \lambda \cdot I_n)$.

Notation : On appelle équation aux éléments propres : $AX = \lambda X$.

Remarque 2.7 : Sont équivalents :

- λ est une valeur propre de A ;
- $A - \lambda \cdot I_n$ n'est pas inversible;
- $\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$.

En particulier, 0 est une valeur propre de A si et seulement si A n'est pas inversible.

Exemple 2.8 : Déterminer les éléments propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Remarque 2.9 : Les éléments propres d'une matrice A coïncident avec ceux de l'endomorphisme canoniquement associé à A . En particulier A a au plus n valeurs propres.

Proposition 2.10

Deux matrices semblables ont le même spectre.

Attention : Mais elles n'ont pas les mêmes sous-espaces propres !

Proposition 2.11

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E . Alors le spectre de f est égal au spectre de la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

Remarque 2.12 : Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, en notant $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ et $\text{Sp}_{\mathbb{K}'}(A)$ le spectre de A dans $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}'$ respectivement :

$$\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \mathbb{K} \cap \text{Sp}_{\mathbb{K}'}(A).$$

Exemple 2.13 : Déterminer le spectre de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{C}$ et en déduire son spectre dans $\mathbb{R}$.

II. C Valeurs propres et polynômes annulateurs

Théorème 2.14

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

- Si P annule u , toute valeur propre de u est une racine de P ;
- les racines du polynôme minimal de u dans $\mathbb{K}$ sont les valeurs propres de u .

Remarque 2.15 : Soit $k \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{K}[X]$, $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.

Si $u(x) = \lambda x$, alors $u^k(x) = \lambda^k x$ et $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

Exemples 2.16 : • homothétie;

- projecteur $p \notin \{0, \text{id}\}$;
- symétrie $s \notin \{\text{id}, -\text{id}\}$;
- matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

III Polynôme caractéristique

III. A Définition et premières propriétés

Définition/Proposition 3.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $x \mapsto \det(xI_n - A)$ est une fonction polynomiale dont le polynôme associé est unitaire et de degré n , il est appelé **polynôme caractéristique** de A et noté χ_A .

Exemples 3.2 :

- Déterminer le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice compagnon du polynôme $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Proposition 3.3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le polynôme caractéristique de A s'écrit :

$$\chi_A = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A).$$

Proposition 3.4

Si deux matrices sont semblables, alors elles ont le même polynôme caractéristique.

Définition/Proposition 3.5

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension n finie.

Alors $x \mapsto \det(x \cdot \text{id} - u)$ est une fonction polynomiale dont le polynôme associé est unitaire et de degré n , il est appelé **polynôme caractéristique de u** et noté χ_u .

Proposition 3.6

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et A est la matrice de u dans une base de E , alors $\chi_u = \chi_A$.

Remarque 3.7 : On retrouve ainsi que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

III. B Cas particuliers**Proposition 3.8**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire. Alors :

$$\chi_A = \prod_{i=1}^n (X - a_{i,i}).$$

Proposition 3.9

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sous espace stable par u et $\tilde{u}$ l'endomorphisme induit par u sur F .

Alors : $\chi_{\tilde{u}}$ divise χ_u .

III. C Racines du polynôme caractéristique**Théorème 3.10**

Les valeurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. de $u \in \mathcal{L}(E)$) sont les racines de son polynôme caractéristique.

Remarques 3.11 : • On retrouve ainsi que le cardinal du spectre de A (ou de u) est inférieur à n .

- Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a toujours au moins une valeur propre (dans $\mathbb{C}$).

III. D Ordre de multiplicité**Définition 3.12**

On appelle **ordre de multiplicité d'une valeur propre** son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.

Exemples 3.13 : • Déterminer le polynôme caractéristique d'un projecteur et donner l'ordre de multiplicité de ses valeurs propres.

- Quel est l'ordre de la valeur propre de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$?

- Valeurs propres de $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Proposition 3.14

Si le polynôme caractéristique de A est scindé, alors A admet exactement n valeurs propres comptées avec multiplicité : $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(A) \text{ et } \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(A).$$

Remarques 3.15 : • Pour retenir les formules : c'est ce qu'on obtient pour une matrice diagonale.

- Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les valeurs propres de A distinctes (comptées sans multiplicité) et $m_1, \dots, m_r$ leur ordre de multiplicité, alors :

$$\prod_{i=1}^r \lambda_i^{m_i} = \det(A) \text{ et } \sum_{i=1}^r m_i \lambda_i = \text{tr}(A).$$

- Tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$, ainsi les formules sont toujours vraies si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Théorème 3.16

La dimension d'un sous-espace propre est inférieur à la multiplicité de la valeur propre correspondante, i.e. :

- Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre d'ordre de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$, alors $1 \leq \dim \text{Ker}(\lambda \cdot \text{id} - u) \leq m$.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre d'ordre de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$, alors $1 \leq \dim \text{Ker}(\lambda \cdot I_n - A) \leq m$.

Remarque 3.17 : En particulier, si λ est une racine simple de χ_u , alors le sous-espace propre associé est de dimension 1.

III. E Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 3.18 (Cayley-Hamilton)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, le polynôme caractéristique de u est annulateur de u .

Remarques 3.19 : • On a donc : $\chi_u(u) = 0$ et de même pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_A(A) = 0_n$.

- le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique : $\mu_u \mid \chi_u$.
- Si χ_u est scindé (toujours vrai si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) et $\chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$, alors $\mu_u = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ avec : $\forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket, 1 \leq \alpha_i \leq m_i$.
- Les polynômes χ_u et μ_u ont les mêmes racines, ce sont les valeurs propres de u .

Exemple 3.20 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\chi_A = (X - 1)^2(X^2 + X + 1)$. Déterminer μ_A .

III. F Astuces

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si la somme de chaque ligne de A vaut λ , alors λ est une valeur propre de A et _____ est un vecteur propre associé.
- Si la somme de chaque colonne de A vaut λ , alors λ est une valeur propre de A .
- Si une colonne est nulle en dehors du coefficient diagonal égal à λ , alors λ est une valeur propre de A et _____ est un vecteur propre associé.
- Si deux lignes ou deux colonnes sont proportionnelles, alors la matrice _____ et _____ est une valeur propre de A .
- Si on connaît $n - 1$ valeurs propres, on peut obtenir la dernière en utilisant la formule sur la trace ou le déterminant (toujours valable dans $\mathbb{C}$).

Exemples 3.21 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer une valeur propre de A et B et les valeurs propres de C .

Pour déterminer la dimension d'un sous-espace propre, on peut se servir de l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée et du théorème du rang.

Exemple 3.22 : Déterminer le polynôme caractéristique, le spectre et les sous-espaces propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

IV Diagonalisation

IV. A Endomorphisme diagonalisable

Définition 4.1

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit **diagonalisable** lorsqu'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

Proposition 4.2

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E un espace vectoriel de dimension finie, et $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ une base de E . La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale si et seulement si $\mathcal{B}$ est constituée de vecteurs propres de E ; et dans ce cas

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ avec } \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, u(x_i) = \lambda_i x_i.$$

Corollaire 4.3

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E un espace vectoriel de dimension finie n , u est diagonalisable si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ de E constituée de vecteurs propres de E .

Exemples 4.4 : Projecteurs et symétries.

IV. B Matrice diagonalisable

Définition 4.5

Une matrice carrée est dite **diagonalisable** lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale.

Proposition 4.6

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E , $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si la matrice A est diagonalisable.

Remarque 4.7 : En particulier, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé à A est diagonalisable.

IV. C Conditions sur les sous-espaces propres

Théorème 4.8 (Condition nécessaire et suffisante)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, sont équivalents :

- u est diagonalisable ;
- la somme (directe) des sous-espaces propres de u est égale à E ;
- la somme des dimensions des sous-espaces propres de u est égale à la dimension de E .

Méthode 4.9

On peut obtenir la dimension d'un sous-espace propre sans avoir à en déterminer une base, en se servant du théorème du rang.

Exemple 4.10 : Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

Corollaire 4.11 (Condition suffisante)

Si u un endomorphisme d'un espace de dimension n admet n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable.

Remarque 4.12 : De même si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.

Attention : La réciproque est fausse ! Contre ex : _____.

Théorème 4.13 (Condition nécessaire et suffisante)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et que pour toute valeur propre de u , la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité.

Remarques 4.14 : • Il suffit de vérifier la condition sur la dimension de l'espace propre associé pour les valeurs propres dont la multiplicité est au moins 2.
• Même résultat pour les matrices carrées.

Exemple 4.15 : La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? et sur $\mathbb{C}$?

Proposition 4.16 (Condition suffisante)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Si χ_u est simplement scindé (scindé à racines simples), alors u est diagonalisable.

Méthode 4.17 (Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable)

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable : $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$.

Exemple 4.18 : Diagonaliser et calculer les puissances de la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

IV. D Diagonalisation et polynômes annulateurs

Théorème 4.19

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Sont équivalents :

- u est diagonalisable ;
- u annule un polynôme simplement scindé ;
- le polynôme minimal de u est simplement scindé.

Remarque 4.20 : Même chose pour les matrices.

IV. E Diagonalisation d'un endomorphisme induit

Proposition 4.21

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace stable par u .

Alors le polynôme minimal de l'endomorphisme induit $\tilde{u}$ par u sur F divise le polynôme minimal de u .

Théorème 4.22

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sous-espace stable par u et $\tilde{u}$ l'endomorphisme induit par u sur F .

Si u est diagonalisable, alors $\tilde{u}$ est diagonalisable.

V Trigonalisation

V. A Endomorphismes trigonalisables

Définition 5.1

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit **trigonalisable** lorsqu'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire (supérieure).

Remarque 5.2 : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de trigonalisation de $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

- le vecteur e_1 est _____ ;
- pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $u(e_i)$ _____.

Ainsi, en notant pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $F_i = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$, les sous-espaces F_i sont stables par u .

Définition 5.3

Une matrice carrée est dite trigonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire (supérieure).

Remarque 5.4 : Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé à A est trigonalisable.

Proposition 5.5

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E , $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. L'endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si la matrice A est trigonalisable.

V. B Caractérisation

Théorème 5.6

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Sont équivalents :

- u est trigonalisable ;
- le polynôme caractéristique de u est scindé ;
- u annule un polynôme scindé ;
- le polynôme minimal de u est scindé.

Remarques 5.7 : • Même chose pour les matrices.

- On retrouve les expressions à l'aide des valeurs propres de la trace et du déterminant d'un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé.

Corollaire 5.8

- Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel est trigonalisable.
- Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Application : Démonstration du théorème de Cayley-Hamilton (non exigible).

VI Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

Définition 6.1

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. L'endomorphisme u est dit **nilpotent** lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$. On appelle **indice de nilpotence** de u le plus petit $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$.

Définition 6.2

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dit **nilpotente** lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$. On appelle **indice de nilpotence** de A le plus petit $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$.

Remarque 6.3 : Un endomorphisme est nilpotent si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que X^k est un polynôme annulateur de u . Dans ce cas le polynôme minimal de u est donc de la forme X^p et p est l'indice de nilpotence de u .

Proposition 6.4

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Sont équivalents :

- u est nilpotent ;
- u est trigonalisable et sa seule valeur propre est 0 ;
- le polynôme caractéristique de u est X^n avec $n = \dim(E)$.

Remarque 6.5 : En particulier, une matrice strictement triangulaire est nilpotente.

Mais attention, la réciproque est fausse. Contre ex : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Corollaire 6.6

L'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent est majoré par la dimension de E .

Remarque 6.7 : Même chose pour les matrices.

VII Sous-espaces caractéristiques

Définition 7.1

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique est scindé :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}.$$

On appelle **sous-espaces caractéristiques** de u les sous espaces :

$$\text{Ker}((u - \lambda_i \cdot \text{id})^{m_i}).$$

Remarques 7.2 : • Soit λ une valeur propre de u , alors le sous-espace _____ est inclus dans le sous-espace _____

- Les sous espaces caractéristiques de u sont stables par u .

Théorème 7.3

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique est scindé, alors E est la somme directe des sous-espaces caractéristiques de u :

$$E = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}((u - \lambda_i \cdot \text{id})^{m_i}).$$

De plus pour tout $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, la dimension du sous-espace caractéristique $\text{Ker}((u - \lambda_i \cdot \text{id})^{m_i})$ est m_i l'ordre de la valeur propre λ_i .

Théorème 7.4

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique est scindé.

Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs et dont les blocs diagonaux sont triangulaires supérieures à termes diagonaux égaux :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & T_r \end{pmatrix} \text{ avec } \forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket, T_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Exemple 7.5 : Suite de l'exemple 3.22.

Déterminer P tel que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$