

Programme de colle S4

Notions au programme

- **Révisions d'algèbre** : polynômes, algèbre linéaire en dimension finie, rang, déterminant, suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
- **Chapitre 2, Compléments de calcul matriciel** : *en totalité*.

Démonstrations à connaître

Étage 1 / Poussin

- [Ch2 §I] Linéarité de la trace
- [Ch2 §I] Trace d'un produit de matrices
- [Ch2 §III.1 P1–P3] Propriétés des polynômes interpolateurs de Lagrange : tous de degré n ; uniques polynômes de degré $\leq n$ nuls en tous les a_i , sauf un où ils valent 1 ; forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$

Étage 2 / Poulet

Le programme Poussin, ainsi que :

- [Ch2 §III.1] Théorème d'interpolation de Lagrange
- [Ch2 §IV] Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.
- [Ch1 §IV.1] Lemme de Moivre :
la suite $(u_n)_{n \geq 1} := \left(\frac{n!}{\sqrt{n}(n/e)^n} \right)_{n \geq 1}$ converge vers une constante $K > 0$.

Étage 3 / Super-Poulet

Les programmes Poussin et Poulet, ainsi que :

- [Ch2 §III.2] Expression du déterminant de Vandermonde
- [Ch1 §III.4] Nature des séries de Riemann
- [Ch1 §IV.4] Règle de d'Alembert

Exercices à savoir refaire

Compléments de calcul matriciel

- [Exercice 7] Recherche de polynômes annulateurs d'une matrice donnée.
- [Exercice 8, Q1] Tout endomorphisme d'une espace vectoriel de dimension finie admet au moins un polynôme annulateur non nul, de degré au plus n^2 .
- [Exercice 11] Interpolation de Lagrange en 3 points explicites.
- [Exercice 14] Application du déterminant de Vandermonde à la liberté d'une famille d'exponentielles.
- [Exercice 15] Suite de déterminants tridiagonaux
- [Exercice 16] Inverse d'une matrice triangulaire supérieure par blocs, à 2 blocs diagonaux.
- [Exercice 18] Déterminant de la matrice définie par blocs $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ lorsque $C \leftrightarrow D$ et D inversible.

Compétences attendues

Polynômes

- Degré d'une somme, d'un produit de polynômes
- Lien entre racines et factorisation
- Lien entre degré et nombre de racines
- Factorisation concrète d'un polynôme de degré 2, de degré 3

Algèbre linéaire

- Prouver qu'une application est linéaire
- Prouver qu'une famille de vecteurs est libre à l'aide de la définition
- Utiliser la dimension pour prouver qu'une famille est une base / est liée
- Utiliser la dimension pour prouver qu'une application linéaire est un isomorphisme
- Résoudre concrètement un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss (en privilégiant le calcul sur des coefficients entiers)

Calcul matriciel

- Calcul concret du rang : majoration par défaut du rang, interprétation d'un rang maximal, rang d'une matrice échelonnée, élimination de rangées, opérations élémentaires sur les rangées.

- Théorème du rang pour les matrices.
- Calcul concret du déterminant : caractère alterné, déterminant d'une matrice triangulaire, opérations sur les rangées, interprétation de la (non)-nullité d'un déterminant, développement selon une rangée.

Compléments de calcul matriciel

- Mobiliser les propriétés formelles de la trace [→ §I]
- Connaître l'expression formelle des coefficients d'un produit de matrices [→ §I : **preuve de** $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$]
- Écrire correctement un polynôme de matrice ou d'endomorphisme **sans oublier l'identité**. [→ §II.1, ex. 3]
- Maîtriser le formalisme nécessaire aux polynômes d'endomorphismes [→ ex. 4, ex.8 Q2]
- Exploiter un polynôme annulateur pour prouver qu'une matrice est inversible, et exprimer son inverse comme combinaison linéaire des premières puissances de la matrice [→ ex 9]
- Exploiter un polynôme annulateur pour exprimer les puissances d'une matrice comme combinaison linéaire de ses premières puissances (à l'aide d'une division euclidienne de polynômes) [→ ex. 10]
- Mobiliser la définition abstraite des polynômes interpolateurs de Lagrange.
- Calculer concrètement les polynômes annulateurs de Lagrange [→ ex. 11, Q1]
- Résoudre concrètement le problème d'interpolation de Lagrange [→ ex. 11, Q3]
- Déterminer les coordonnées d'un polynôme dans la base d'interpolation de Lagrange [→ ex. 11, Q2]
- Reconnaître un déterminant de Vandermonde. Mobiliser sa formule explicite sans erreur de détail [→ ex. 12, 13, 14]
- Déterminer une relation de récurrence satisfaite par une suite de déterminants [→ ex. 15].
- Reconnaître une structure par blocs dans une matrice donnée, en particulier les matrices triangulaires et diagonales par blocs [→ ex. 17]
- Calculer avec des matrices définies par blocs : connaître les contraintes de compatibilité de découpage (pour les sommes et produits) ; ne pas intervertir les facteurs dans les calculs de produits.
- Mobiliser les déterminants par blocs [→ ex. 18].