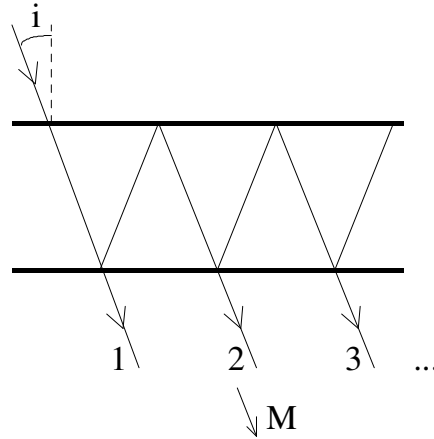


1.5 Interférences à N ondes-Exercice 6

Un interféromètre de Fabry-Pérot est assimilé à une lame d'air d'épaisseur e comprise entre deux lames semi-réfléchissantes parallèles identiques.

Ces lames sont supposées infiniment fines et sont traitées de telle sorte que leur coefficient de réflexion en énergie est égal à $R = 0,8$. Elles sont sans pertes, de telle sorte que leur coefficient de transmission en énergie est égal à $T = 1 - R$.

L'interféromètre est éclairé sous incidence i par une onde d'amplitude $A_0 = \sqrt{\epsilon_0}$ émise par une source ponctuelle monochromatique de longueur d'onde λ_0 et on observe l'éclairement à l'infini, en un point M .



a-Démontrer que le déphasage entre les deux premières ondes transmises est $\phi = \frac{4\pi e \cos i}{\lambda_0}$.

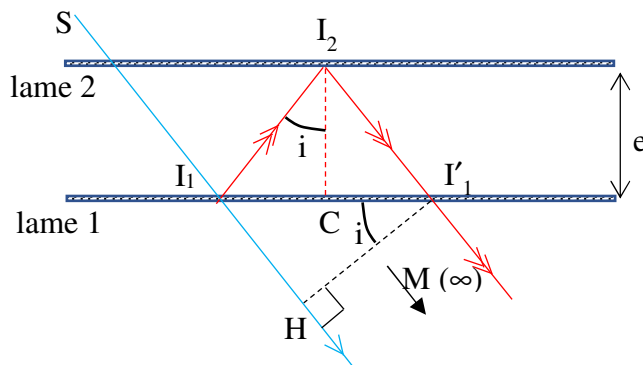
b-Etablir l'expression des amplitudes complexes $\underline{a}_k$ des ondes transmises successives, en fonction de A_0 , R et ϕ .

Justifier que pour calculer l'amplitude résultante $\underline{a}(M)$, on ne peut pas se limiter aux deux premières ondes transmises.

c-En déduire l'expression de $\underline{a}(M)$ et de l'éclairement $\epsilon(M)$. Calculer le facteur de contraste et tracer $\epsilon(\phi)$.

On appelle *finesse* des anneaux le rapport $F = 2\pi/\Delta\phi$ où $\Delta\phi$ est l'angle pour lequel l'éclairement est égal à la moitié de sa valeur maximale. Calculer F et commenter l'intérêt de l'interféromètre de Fabry-Pérot.

a-



$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M) \text{ avec } \delta(M) = (SM)_2 - (SM)_1 = (SI_1) + (I_1I_2) + (I_2I'_1) + (I'_1M) - (SI_1) - (I_1M)$$

$$= 2(I_1I_2) + (I'_1M) - (I_1H) - (HM) \quad \text{car } (I_1I_2) = (I_2I'_1)$$

Les points H et I'_1 appartiennent à une même surface d'onde relative à une source fictive en M : $(I'_1M) = (HM)$

Il reste : $\delta(M) = 2I_1I_2 - I_1H \quad (n = 1)$

$$\text{Triangle } I_1I_2C : \cos i = \frac{e}{I_1I_2} \Rightarrow I_1I_2 = \frac{e}{\cos i} \quad \text{Triangle } I_1I'_1H : \sin i = \frac{I_1H}{I_1I'_1} = \frac{I_1H}{2I_1C} \Rightarrow I_1H = 2I_1C \sin i$$

1.5 Interférences à N ondes-Exercice 6

Triangle $I_1 I_2 C$: $\tan i = \frac{I_1 C}{e} \Rightarrow I_1 C = e \tan i \Rightarrow I_1 H = 2e \tan i \sin i = \frac{2e}{\cos i} \sin^2 i$

Donc : $\delta(M) = \frac{2e}{\cos i} - \frac{2e}{\cos i} \sin^2 i = \frac{2e}{\cos i} (1 - \sin^2 i) = 2e \cos i$ Finalement : $\phi = \frac{4\pi e \cos i}{\lambda_0}$

b-• L'onde incidente d'amplitude A_0 subit deux transmissions, avec pour chacune un coefficient de transmission en énergie T donc en amplitude $\sqrt{T}$, pour donner naissance à la première onde transmise, donc :

$$\underline{a}_1(M) = (\sqrt{T})^2 A_0 e^{i(\omega t - \phi_1(M))} = T A_0 e^{i(\omega t - \phi_1(M))} = (1-R) A_0 e^{i(\omega t - \phi_1(M))}$$

• L'onde 2 subit deux réflexions en plus avec un coefficient de réflexion en amplitude $\sqrt{R}$ et le déphasage ϕ :

$$\underline{a}_2(M) = \underline{a}_1(M) (\sqrt{R})^2 e^{-i\phi} = \underline{a}_1(M) R e^{-i\phi}$$

• Idem pour l'onde 3 par rapport à l'onde 2 : $\underline{a}_3(M) = \underline{a}_2(M) R e^{-i\phi} = \underline{a}_1(M) (R e^{-i\phi})^2$

• Par récurrence : $\underline{a}_k(M) = \underline{a}_1(M) (R e^{-i\phi})^{k-1} = (1-R) A_0 e^{i(\omega t - \phi_1(M))} (R e^{-i\phi})^{k-1}$

Entre l'amplitude de l'onde $k+1$ et celle de l'onde k , il y a un facteur $R = 0,8$. Deux ondes consécutives quelconques ont donc des amplitudes voisines. On ne peut pas se limiter aux deux premières.

c-On suppose qu'il y a $N \gg 1$ ondes qui interfèrent, à la limite N tend vers l'infini.

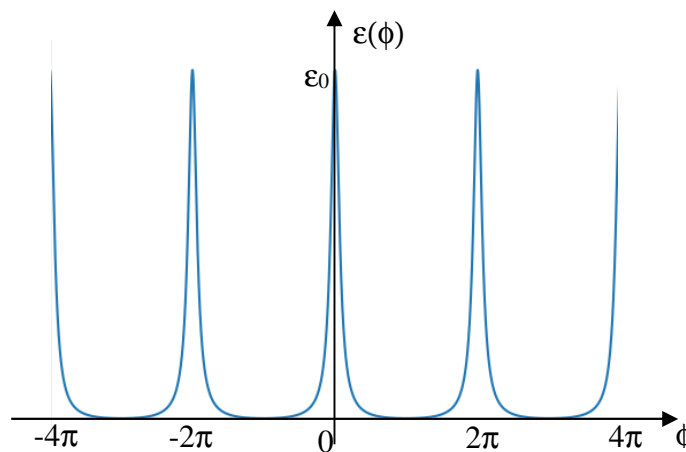
Amplitude totale : $\underline{a}(M) = \sum_{k=1}^{+\infty} \underline{a}_k(M) = (1-R) A_0 e^{i(\omega t - \phi_1(M))} \sum_{k=1}^{+\infty} (R e^{-i\phi})^{k-1} \Rightarrow \underline{a}(M) = \frac{(1-R) A_0}{1 - R e^{-i\phi}} e^{i(\omega t - \phi_1(M))}$

Eclairement : $\varepsilon(M) = \underline{a}(M) \cdot \underline{a}^*(M) = \frac{(1-R) A_0}{1 - R e^{-i\phi}} \frac{(1-R) A_0}{1 - R e^{i\phi}} \Rightarrow \varepsilon(M) = \varepsilon_0 \frac{(1-R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos \phi}$

Eclairement maximum pour $\cos \phi = 1$ soit $\phi = 0 [2\pi]$: $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_0$

Eclairement minimum pour $\cos \phi = -1$ soit $\phi = \pi [2\pi]$: $\varepsilon_{\min} = \varepsilon_0 \frac{(1-R)^2}{(1+R)^2} \approx 10^{-2} \varepsilon_0 \ll \varepsilon_0$

Le contraste sera donc très proche de 1. Les interférences sont bien nettes.



On cherche : $\varepsilon(\Delta\phi) = \frac{\varepsilon_0}{2} \Rightarrow \frac{(1-R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos \Delta\phi} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 + R^2 - 4R = -2R \cos \Delta\phi$

$\Delta\phi$ étant petit : $1 + R^2 - 4R \approx -2R(1 - \frac{\Delta\phi^2}{2})$ D'où : $\Delta\phi = \frac{1-R}{\sqrt{R}}$

La finesse vaut alors : $F = \frac{2\pi\sqrt{R}}{1-R} = 28 \gg 1$ Les franges brillantes sont très fines.