

Branches infinies des courbes

On suppose D_f tel que les limites envisagées ont un sens.

1) Asymptotes verticales

(On les trouve au voisinage d'un point x_0 .)

Soit x_0 un réel .

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm \infty$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm \infty$, alors C_f admet pour asymptote verticale la droite d'équation $x = x_0$.

Exemple : $f(x) = \frac{1}{x}$. C_f admet pour asymptote verticale la droite d'équation $x = 0$.

2) Asymptotes obliques ou horizontales

(On les trouve au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$.)

S'il existe deux réels a et b tels que $\forall x \in D_f \quad f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$, avec

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varepsilon(x) = 0$), alors la courbe C_f admet pour asymptote la droite d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$). Le signe de $\varepsilon(x)$ donne alors la position de la courbe par rapport à son asymptote ..

Exemple :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1} = \frac{(x-1)^2 + 2}{x-1} = x - 1 + \frac{2}{x-1}$$

C_f admet pour asymptote la droite d'équation $y = x - 1$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

Au voisinage de $+\infty$, $\frac{2}{x-1} > 0$, donc la courbe est localement au-dessus de son asymptote,

et au voisinage de $-\infty$, $\frac{2}{x-1} < 0$, donc la courbe est localement en-dessous de son asymptote.

NB: Une courbe ne reste pas forcément toujours d'un même côté de son asymptote!

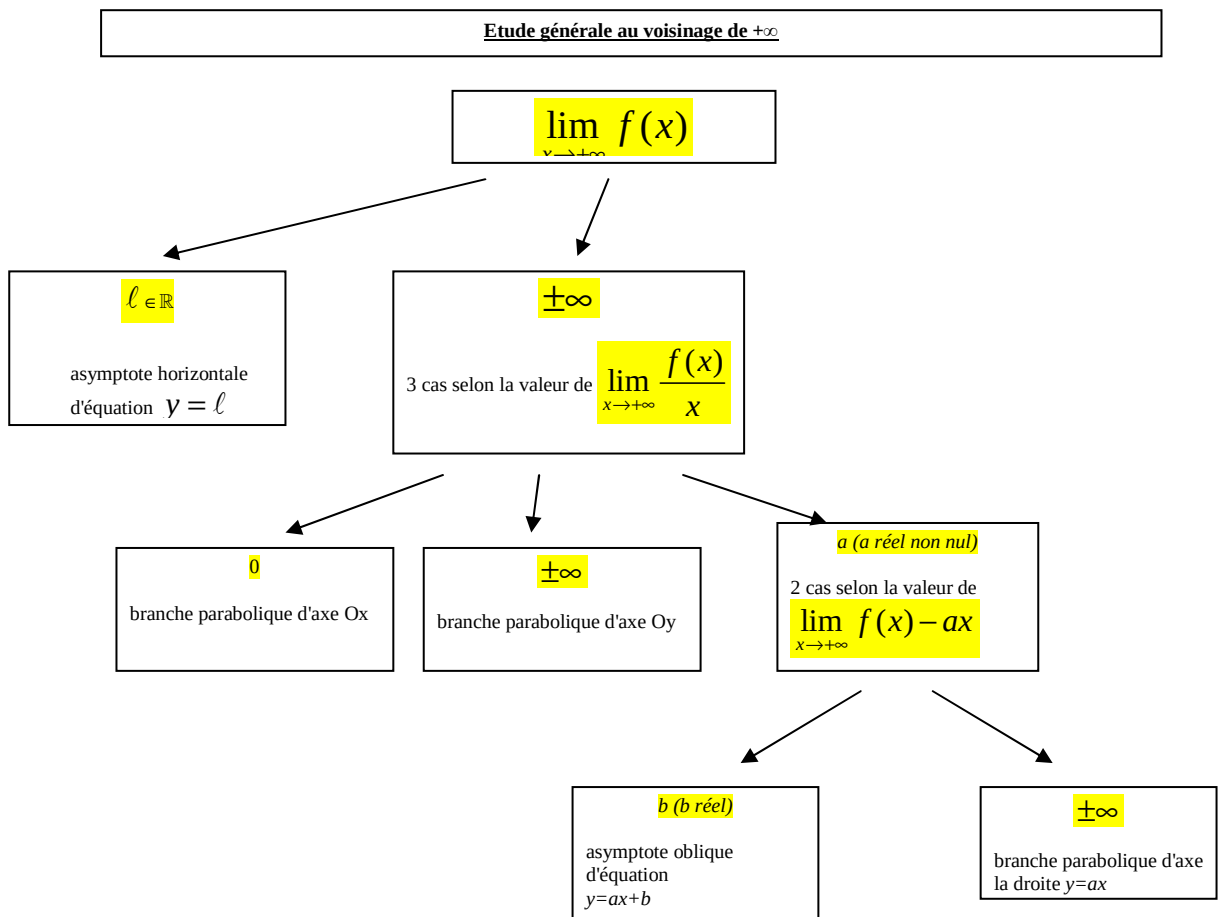
Penser à la courbe représentative de $\frac{\sin x}{x}$.

Mais, au voisinage de l'infini, il n'y a pas toujours des asymptotes, il peut aussi y avoir des branches paraboliques (ou d'autres choses qui ne sont pas au programme de bcpst .)

3) Etude générale au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

(A faire uniquement si il ne vous a pas sauté aux yeux comme dans le paragraphe précédent d'asymptote horizontale ou oblique.)

Le tableau ci-dessous résume les étapes successives de l'étude au voisinage de $+\infty$. On raisonnera de manière similaire au voisinage de $-\infty$



Exemples simples:

$f(x) = x^2$ branche parabolique d'axe Oy

$f(x) = \sqrt{x}$ branche parabolique d'axe Ox

$f(x) = 2x + \sqrt{x}$ branche parabolique d'axe la droite d'équation $y = 2x$