

chapitre 3 exercice 13

1. Montrons par récurrence double : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) : \exists T_n \in \mathbb{R}_n[X] \mid \forall x \in \mathbb{R}, T_n(\cos(x)) = \cos(nx), \deg T_n = n$ et si $n \geq 1$, le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} .

Initialisation : pour $n = 0$ et $n = 1$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(0x) = 1$, donc $T_0 = 1$ convient.

$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(1x) = \cos(x)$, donc $T_1 = X$ convient.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n-1)$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \cos((n+1)x) &= \cos(nx+x) \\ &= \cos(nx)\cos(x) - \sin(nx)\sin(x) \\ \cos((n-1)x) &= \cos(nx-x) \\ &= \cos(nx)\cos(x) + \sin(nx)\sin(x) \end{aligned}$$

donc :

$$\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2\cos(nx)\cos(x),$$

donc, par hypothèse de récurrence :

$$\cos((n+1)x) = 2\cos(x)T_n(\cos(x)) - \cos((n-1)x).$$

On pose $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$, donc : $T_{n+1}(\cos(x)) = \cos((n+1)x)$. De plus, $\deg(2XT_n) = n+1$ et $\deg(T_{n-1}) = n-1$; donc $\deg(T_{n+1}) = n+1$ et le coefficient dominant de T_{n+1} est $2 \times 2^{n-1} = 2^n$. D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Donc, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists T_n \in \mathbb{R}_n[X] \mid \forall x \in \mathbb{R}, T_n(\cos(x)) = \cos(nx), \deg(T_n) = n$ et si $n \geq 1$, le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} .

Unicité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $S_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, S_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, (T_n - S_n)(\cos(x)) = 0$; or $\cos(\mathbb{R}) = [-1; 1]$, donc : $\forall y \in [-1; 1], (T_n - S_n)(y) = 0$.

Donc : $(T_n - S_n)$ a une infinité de racines; donc $T_n = S_n$.

Conclusion :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T_n(\cos x) = \cos(nx),$$

de plus $\deg(T_n) = n$ et son coefficient dominant est 2^{n-1} si $n \geq 1$.

2. On pose $\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, x_i = \cos(a_i)$ et $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, T_k = 2^{k-1}X^k + \sum_{j=0}^{k-1} b_{k,j}X^j$

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & \cos(a_0) & \cos(2a_0) & \dots & \cos(na_0) \\ 1 & \cos(a_1) & \cos(2a_1) & \dots & \cos(na_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos(a_n) & \cos(2a_n) & \dots & \cos(na_n) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & x_0 & T_2(x_0) & \dots & T_n(x_0) \\ 1 & x_1 & T_2(x_1) & \dots & T_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & T_2(x_n) & \dots & T_n(x_n) \end{vmatrix} C_2 \leftarrow C_3 - b_{2,0}C_1 - b_{2,1}C_2 \\ &= \begin{vmatrix} 1 & x_0 & 2x_0^2 & \dots & T_n(x_0) \\ 1 & x_1 & 2x_1^2 & \dots & T_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & 2x_n^2 & \dots & T_n(x_n) \end{vmatrix} C_3 \leftarrow C_4 - \sum_{j=0}^3 b_{3,j}C_{j+1} \\ &= \dots \\ &= \begin{vmatrix} 1 & x_0 & 2x_0^2 & \dots & 2^{n-1}x_0^n \\ 1 & x_1 & 2x_1^2 & \dots & 2^{n-1}x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & 2x_n^2 & \dots & 2^{n-1}x_n^n \end{vmatrix} \\ &= \left(\prod_{k=1}^n 2^{k-1} \right) V(x_0, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Donc :

$$D = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{0 \leq i < j \leq n} (\cos(a_j) - \cos(a_i)).$$

Exercice 1 (CCINP 87).

Énoncé exercice 87

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si $b_0, b_1, \dots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant

$$\deg P \leq n \text{ et } \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_i) = b_i.$$

2. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Expliciter ce polynôme P , que l'on notera L_k , lorsque :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

3. Prouver que $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p$.

Corrigé exercice 87

1. L'application $u : \begin{matrix} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)) \end{matrix}$ est linéaire.

Montrons que $\text{Ker } u = \{0\}$.

Si $P \in \text{Ker } u$, alors $P(a_0) = P(a_1) = \dots = P(a_n) = 0$ et le polynôme P , de degré inférieur ou égal à n , admet $n+1$ racines distinctes.

Donc $P = 0$.

Ainsi u est injective et comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$, u est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Enfin les conditions recherchées sont équivalentes à : $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $u(P) = (b_0, \dots, b_n)$.

La bijectivité de u dit que ce problème admet une unique solution P et on a $P = u^{-1}((b_0, \dots, b_n))$.

2. Pour ce choix de $b_0, b_1, \dots, b_n$ le polynôme L_k vérifie les conditions :

$$\deg L_k \leq n \text{ et } \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_k(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

Comme $a_0, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n$ sont n racines distinctes de L_k qui est de degré $\leq n$, il existe nécessairement $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$L_k = \lambda \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (X - a_i)$$

La condition supplémentaire $L_k(a_k) = 1$ donne $\lambda = \frac{1}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (a_k - a_i)}$ et finalement :

$$L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$$

3. Soit $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Les polynômes $\sum_{k=0}^n a_k^p L_k$ et X^p vérifient les mêmes conditions d'interpolation :

$$\deg P \leq n \text{ et } \forall i \in \{0, \dots, n\} P(a_i) = a_i^p$$

Par l'unicité vue en première question, on a $\sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p$.