

Chapitre 2

Ensembles applications

autour des ensembles et de leur mise en relation.



Contenu :

I.	Ensembles	3
1)	Ensembles et sous ensembles	3
a)	Définition et notations	3
b)	Sous ensemble	3
c)	Ensemble des parties d'un ensemble :	4
2)	Intersection, réunion	5
a)	Intersection :	5
b)	Union	5
c)	Distributivité	6
d)	Recouvrement et partition	6
3)	Opérations sur les ensembles	7
a)	Complémentaire, différence	7
b)	Complémentaire, union et intersection	7
c)	produit cartésien.	8
II.	Applications.	9
1)	Généralités :	9
a)	Définition et notation	9
b)	Exemples :	9
2)	Opérations :	10
a)	Restriction	10
b)	Prolongement	10
3)	Image directe, image réciproque	11
a)	Image directe :	11
b)	Image réciproque	12
c)	Images, antécédent et inclusion	13
III.	Injections, surjections et bijections	13
1)	Applications injectives :	13
a)	Définition	13
b)	Cas particulier de fonctions injectives :	14
2)	Surjections :	15
3)	Bijections	16
a)	Définition :	16
b)	Bijection réciproque	16
c)	Composition de bijection	17
d)	Représentation graphique de la réciproque :	18
e)	Cas particuliers de bijections	18

I. Ensembles

1) Ensembles et sous ensembles

a) Définition et notations



Définition : ensemble

On appelle **ensemble** tout objet mathématique contenant des éléments.

Si x est un élément de E , on note $x \in E$, ce qui se lit " x **appartient** à E ." (ou x "appartenant" à E selon le contexte).

Exemple :

Pour décrire un ensemble, on utilisera plusieurs types de notation :

- $E = \{2; 3; 4; 5; 6\}$: les accolades " $\{ \}$ " se lisent "ensemble constitué de..." ou "ensemble des...".

Ce même ensemble peut se noter :

$$E = \{n \in \mathbb{N}; 2 \leq n \leq 6\}$$

Ceci se lit de la façon suivante :

- $I = [0; 1]$: les intervalles sont bien sûr des ensembles. Les $[\]$ signifient "tous les réels entre...".

On pourrait également écrire $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 1\}$.

- $E = \{2; 3; 4; 5; 6\}$ peut aussi se noter $E = \llbracket 2, 6 \rrbracket$. Les $\llbracket \]$ désignent "les intervalles d'entiers".

- $\emptyset$ désigne le seul ensemble qui n'a pas d'élément : on l'appelle **ensemble vide**.

b) Sous ensemble



Définition : sous ensemble, partie d'un ensemble

On dit qu'un ensemble A est un **sous ensemble de** E (ou **partie de** E) si tout élément de A est un élément de E .

On note alors $A \subset E$ et on lit " A inclus dans E ".

Avec des quantificateurs, $A \subset E$ se traduit par

$$\forall x \in A, x \in E$$

Exemples :

- $\mathbb{N}$ est un sous ensemble de $\mathbb{Z}$.
- On a une sorte de chaîne d'inclusions dans l'ensemble des nombres :
- $\emptyset$ est le seul ensemble inclus dans tous les ensembles !



Méthode :

MONTREZ UNE INCLUSION

Pour montrer qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B , on utilise le fait que dire $A \subset B$ signifie exactement "si on est dans A , alors on est dans B ".

On procédera donc de la façon suivante :

1. On prend un élément quelconque $x \in A$ (en annonçant "soit $x \in A$ "),
2. On montre que $x \in B$.
3. On conclut "donc $A \subset B$."

Exemple :

Soit A l'ensemble des multiples de 4 et B l'ensemble des multiples de 2. Montrons que $A \subset B$.



Theorème 1 : théorème de la double inclusion

Soient E et F deux ensembles. Alors $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

Cela fournit une méthode de démonstration : pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux, on pourra montrer d'abord $E \subset F$, puis $F \subset E$.

c) Ensemble des parties d'un ensemble :



Définition : ensemble des parties

Soit E un ensemble.

On appelle **ensemble des parties de E** , que l'on note $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des sous ensembles de E .

Ainsi, dire $A \in \mathcal{P}(E)$ signifie exactement $A \subset E$.

Exemple :

- Soit $E = \{1, 2, 3\}$ l'ensemble des parties de E est

- Comme $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, c'est à dire que $\mathbb{N}$ est un sous ensemble de $\mathbb{Z}$, on peut écrire $\mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$.
- Pour tout ensemble E , on a $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$.



Au secours !

C'EST SUPER GRAND $\mathcal{P}(E)$ NON ?



Si un ensemble E a n éléments, on peut montrer que $\mathcal{P}(E)$ en a 2^n ...

Très rapidement, on abandonnera donc l'idée de faire la liste des parties d'un ensemble....

2) Intersection, réunion

a) Intersection :



Définition : intersection

► Soient A et B deux parties de E .

On définit l'**intersection** de A et de B , notée $A \underbrace{\cap}_{\text{"inter"}} B$ par :

$$A \cap B =$$

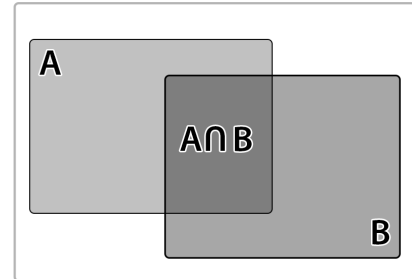
Ce sont les éléments qui sont à la fois dans A et B .

► On généralise à n ensembles de la façon suivante :

si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont n ensembles, on définit $\bigcap_{i=1}^n A_i$ par

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

C'est l'ensemble des éléments de E qui sont *simultanément* dans tous les A_i .



Exemples :

► $[0; 3] \cap [2; 4] =$

► $]0; 4[\cap]-2; -1[=$: on dit que $]0; 4[$ et $] -2, -1[$ sont



Propriété 1 :

(i) L'intersection est commutative et associative :

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{et} \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(ii) L'intersection de deux ensembles est "plus petite" que les ensembles de départ :

$$A \cap B \subset A \quad \text{et} \quad A \cap B \subset B$$

b) Union



Définition : union

► Soient A et B deux parties de E . On définit l'**union** de A et de B , notée $A \underbrace{\cup}_{\text{"union"}} B$ par :

$$A \cup B =$$

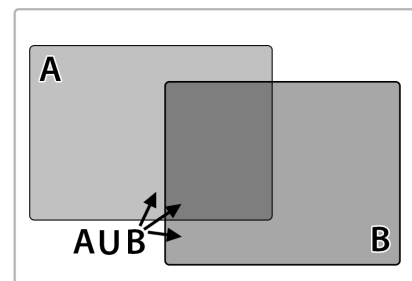
Ce sont les éléments qui sont dans A ou dans B (ou dans les deux).

► On généralise à n ensembles de la façon suivante :

si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont n ensembles, on note

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

C'est l'ensemble des éléments de E qui sont dans au moins un des A_i .



Exemple :

$[0; 3] \cup [2; 4] =$

**Propriété 2 :**

Soit A, B, C trois ensembles

- (i) $A \cup B = B \cup A$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- (ii) $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ (la réunion est "plus grande")
- (iii) Si $A \subset C$ et $B \subset C$ alors $A \cup B \subset C$

▷ *Preuve* : Ce sont des preuves quasi évidentes, qu'on pourrait montrer par exemple avec une table de vérité pour (i).

La (ii) et la (iii) se montrent de manière similaire. Par exemple pour (iii) :

<

c) Distributivité**Propriété 3 :**

Soient A, B et C trois ensembles. Alors

- ▶ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- ▶ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

▷ *Preuve* : Avec une table de vérité, en traitant 9 situations (du genre $x \in A$, $x \notin B$ et $x \in C$ etc...).

<

d) Recouvrement et partition**Définition : partition et recouvrement**

- ▶ Soit E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E (l'ensemble I peut être fini ou non).

On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un **recouvrement** de E si $\bigcup_{i \in I} A_i = E$

- ▶ Si les A_i sont deux à deux disjoints, c'est à dire si, quand $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, on dit qu'on a un **recouvrement disjoint** de E .

- ▶ Enfin, si on a un recouvrement disjoint et qu'aucun des ensembles A_i est vide, on parle de **partition** de E .

Exemples :

- ▶ $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ constituent un recouvrement de $\mathbb{R}$. Ce n'est pas une partition car ils ont 0 en commun.
- ▶ L'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des nombres impairs est une partition de l'ensemble des entiers.
- ▶ Quand on étudie des fonctions périodiques de période T , il est fréquent d'étudier la fonction sur un intervalle de la forme $[0, T]$.
On dit souvent qu'on prolonge l'étude par "périodicité", en répétant ce qu'on a fait sur une période à $\mathbb{R}$ tout entier.
Ce que l'on utilise en réalité, c'est que les intervalles $A_i = [i \times T, (i+1) \times T]$ forment un recouvrement de $\mathbb{R}$.

3) Opérations sur les ensembles

a) Complémentaire, différence

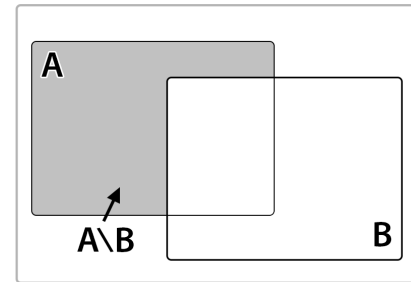


Définition : différence

Soient A et B deux parties d'un ensemble E .
On définit la **différence** de A et de B , notée $A \setminus B$ par

$$A \setminus B = \{x \in A; x \notin B\}$$

La barre oblique se lit "privé de" et on dit qu'on effectué la différence de A par B .



Exemple :

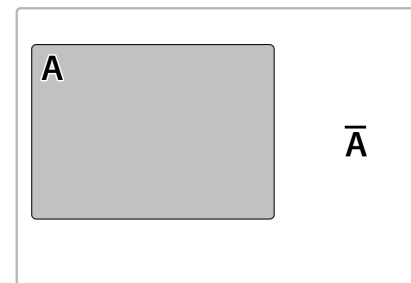
si on veut parler de nombres réels non nuls, on peut écrire $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, que l'on note le plus souvent $\mathbb{R}^*$.



Définition : complémentaire

Soit E un ensemble et A une partie de E . On définit le **complémentaire** de A dans E (ou simplement le complémentaire de A si il n'y a pas d'ambiguïté), noté $E \setminus A$, $\overline{A}$ ou A^c par

$$\overline{A} = \{x \in E; x \notin A\}$$



Exemple :

- dans $\mathbb{R}$, $\overline{[0, +\infty[} =$
- dans $\mathbb{R}$, $\overline{[0; 1]} =$
- dans $E = \llbracket 0, 5 \rrbracket$, avec $A = \{0, 2, 4\}$ on a $\overline{A} =$

b) Complémentaire, union et intersection



Proposition 1 : Lois de Morgan

Soient A et B deux ensembles, alors

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \text{ et } \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

▷ *Preuve* : Même preuve que dans le chapitre 1

◁

c) produit cartésien.



Définition : Produit cartésien

Soit E et F deux ensembles. On note $E \times F$ l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$. Autrement dit :

$$E \times F = \{(x, y); x \in E, y \in F\}$$

On dit alors que $E \times F$ est le **produit cartésien** de E par F .

Un élément de $E \times F$ est appelé **couple** de $E \times F$

Exemples :

► $\{0; 1\} \times \{1; 2\} =$

► On peut représenter un produit cartésien sous forme de tableau à double entrée.

Par exemple $\{0; 1\} \times \{1; 2; 4\}$ peut se voir sous la forme :

Généralisation :

On peut faire le produit cartésien de plus que deux ensembles : $E \times F \times G$ sera par exemple l'ensemble des triplets (x, y, z) avec $x \in E, x \in F, x \in G$.

Si on a p ensembles reliés par des produits cartésiens, les éléments sont appelés des **p -uplets** ou des **p -listes**.



NOTATION

On note $E^2 = E \times E$ l'ensemble des couples de E , et pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on note

$$E^p = \underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{p \text{ fois}}$$

l'ensemble des p -listes d'éléments de E .



A noter :

PARENTHÈSES OU ACCOLADES ?

Pour les p listes et les produits cartésiens en général, l'ordre est important. On marque cet ordre en utilisant des parenthèses :

Le couple $(1, 2)$ est différent du couple $(2, 1)$.

En revanche, les accolades désignent l'ensemble des valeurs. Ainsi, $\{1, 2\}$ et $\{2, 1\}$ désigne le même ensemble...

A RETENIR : on utilise des parenthèses si l'ordre est important, des accolades si l'ordre est indifférent.

II. Applications.

1) Généralités :

a) Définition et notation



Définition : application

Soit E et F deux ensembles.

On dit que f est une **application** définie sur un ensemble E à valeur dans un ensemble F si à tout élément de E , f associe un unique élément de F .

Pour tout $x \in E$, l'élément de F associé à x est appelé **image** de x et est noté $f(x)$.

Pour désigner une application de E dans F , on utilisera souvent la notation :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Notation et vocabulaire :

- On note F^E ou $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F .
- Soit $y \in F$. Si il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$, on dit que x est un **antécédent** de y par l'application f .

Remarques :

- Un élément de F peut avoir aucun, un ou plusieurs antécédents. En revanche, un élément de E a TOUJOURS une et une seule image.
- Cela ressemble fortement à une fonction... et pour cause : on confond souvent les deux termes ! Les différences sont subtiles (et hors programme), mais on utilisera le plus fréquemment le terme "fonction" quand on manipule des nombres, et "applications" quand on travaille sur des autres ensembles.

b) Exemples :

- L'application qui "ne fait rien" est appelée **identité**. Ainsi, l'identité de E , notée Id_E est l'application :

$$\text{Id}_E : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

- La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est une application. On peut écrire que $\ln \in$

- L'opération consistant à dériver est une application.
Elle part de l'ensemble

Pour aller dans

- Soit E un ensemble et $A \subset E$. On définit l'application "indicatrice de A ", notée $\mathbb{1}_A$ par :

$$\mathbb{1}_A : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

Par exemple, si $A =]0, 3[$, $\mathbb{1}_A(2) =$ et $\mathbb{1}_A(-1) =$.

2) Opérations :

a) Restriction



Définition : restriction

Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application. Soit $A \subset E$.
On appelle **restriction de f à A** , que l'on note parfois $f|_A$, l'application

$$f|_A : \begin{array}{ccc} A & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Exemple :

L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ peut être restreinte à $\mathbb{R}_+$ (si par exemple on veut considérer plus précisément la croissance de celle-ci sur cet intervalle...)

b) Prolongement



Définition : prolongement

Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application. Soit A un ensemble tel que $E \subset A$.
On appelle **prolongement de f à A** toute application g telle que $g|_E = f$.

Remarque :

Il y a en général une infinité de prolongements possibles Par exemple :

- L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{|x|} \end{array}$ est un prolongement à $\mathbb{R}$ de l'application $\sqrt{} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f(x) = \sqrt{x}$.

Graphiquement :

On pourrait également considérer

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

Ce serait également un prolongement de $\sqrt{}$ à $\mathbb{R}$, dont la représentation graphique est

► Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

On peut montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et on peut ainsi prolonger f en 0 en posant $f(0) = 1$.

Lorsque la valeur choisie pour prolonger est la limite de la fonction en ce point, on dit qu'on a prolongé f "par continuité". En général, on ne renomme pas la nouvelle fonction obtenue, on précise simplement la nouvelle valeur :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

3) Image directe, image réciproque

a) Image directe :



Définition : image directe d'un ensemble

Soit $f : E \rightarrow F$ une application et soit $A \subset E$.

On appelle **image directe** de A par f , ou simplement **image de** A par f l'ensemble des images des éléments de A . On le note simplement $f(A)$ et on a

$$f(A) = \{f(a); a \in A\}$$

Autrement dit : $y \in f(A)$ si et seulement si $\exists x \in A, f(x) = y$.

Exemples :

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$. Alors :

► $f(\{2, 3\}) =$

► $f([0, 2]) =$

► $f([-1, 1]) =$



Méthode :

COMMENT DÉTERMINER $f(A)$?

Il n'existe pas de méthode valable pour toutes les applications.

Néanmoins, si f est une fonction "classique" dont l'étude est possible, le tableau de variation est un outil très important qui permet de déterminer facilement les ensembles images.

b) Image réciproque



Définition : image réciproque d'un ensemble

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Soit $B \subset F$. On appelle **image réciproque** de B l'ensemble de tous les antécédents des éléments de B .

On le note $f^{-1}(B)$ et on a

$$f^{-1}(B) = \{x \in E; f(x) \in B\}$$

Autrement dit, $x \in f^{-1}(B)$ si et seulement si $f(x) \in B$.



Au secours !

C'EST QUOI CETTE NOTATION ?

La notation $f^{-1}(B)$ est de prime abord étrange. En effet, le $^{-1}$ est habituellement associé à l'inverse (puisque $x^{-1} = \frac{1}{x}$).

Ici, $f^{-1}(B)$ ne veut surtout pas dire $\frac{1}{f(B)}$! On a en réalité toujours l'idée "d'inverse", mais dans l'idée "d'aller dans l'autre sens" (plus rigoureusement : c'est l'idée de *réciproque*).

Déterminer $f^{-1}(B)$, c'est chercher les éléments de E qui ont leurs images dans B : c'est bien raisonner "en sens inverse" du sens normal d'une application.

D'où le $^{-1}$.



Méthode :

DÉTERMINATION DE L'IMAGE RÉCIPROQUE

On cherche les éléments $x \in E$ vérifiant certaines conditions : il s'agira donc souvent de résoudre des équations ou des inéquations.

Exemple :

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

► $f^{-1}(\{4\}) =$

► $f^{-1}([0, 2]) =$

► $f^{-1}([3, 9]) =$

► $f^{-1}([-2, -1]) =$

c) Images, antécédent et inclusion



Propriété 4 :

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

(i) Soit A et B parties de E , alors

$$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$$

(ii) Soient A et B parties de F , alors

$$A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$$

▷ *Preuve* :

◁

III. Injections, surjections et bijections

1) Applications injectives :

a) Définition

Pour toutes les application, si $a = b$, alors $f(a) = f(b)$. Lorsque la réciproque est vraie, on pose la définition suivante :



Définition : injectivité

Soit f une application définie sur un ensemble E à valeur dans F .

On dit que f est **injective** sur E si et seulement si :

$$\forall a, b \in E, f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

Autrement dit : une f est injective signifie que deux images sont égales seulement si les antécédents sont égaux... ou encore que les éléments de F (l'ensemble d'arrivée) ont au plus un antécédent (c'est à dire aucun ou un seul)

Exemple :

► La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est injective sur $\mathbb{R}_+$:

► La fonction $f : x \mapsto x^2$

Remarque :

La contraposée de la définition d'injective est intéressante également :



Propriété 5 :

$f : E \rightarrow F$ est injective sur un ensemble D si et seulement si, pour tout $a, b \in E$:

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

Autrement dit : deux éléments différents ont toujours une image différente...

b) Cas particulier de fonctions injectives :



Définition : (rappel)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si et seulement $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (resp. $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$).



Proposition 2 :

Soit f une fonction **strictement monotone** sur un intervalle I . Alors f est injective.

► *Preuve :*

Exemples :

- ▶ $x \mapsto e^x$ est injective sur $\mathbb{R}$ car strictement croissante.
- ▶ $x \mapsto \ln(x)$ est injective sur $\mathbb{R}_+^*$ car strictement croissante.
- ▶ $x \mapsto x^2$ est injective sur $\mathbb{R}_-$ car elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.
Elle est également injective sur $\mathbb{R}_+$ car elle y est strictement croissante.
Elle n'est pas injective sur $\mathbb{R}$.



Danger !

INJECTIF NE SIGNIFIE PAS STRICTEMENT MONOTONE

Il existe des fonctions injectives qui ne sont ni croissante, ni décroissante.

Par exemple :

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

est injective sur $\mathbb{R}^*$, mais elle n'est ni décroissante, ni croissante sur $\mathbb{R}^*$.



Méthode :

MONTRER QUE f EST INJECTIVE

Pour montrer qu'une application est injective on pourra :

1. Si c'est une fonction dérivable, étudier ses variations et voir si elle est strictement monotone.
2. On peut aussi résoudre l'équation à double inconnue $f(x) = f(y)$ et montrer que seul $x = y$ est possible.
3. On peut résoudre l'équation $y = f(x)$ et montrer qu'il ne peut jamais y avoir plusieurs solutions, quelle que soit la valeur de y .

2) Surjections :



Définition : surjectivité

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

f est dite **surjective** sur F si et seulement si tout élément de F admet au moins un antécédent dans E .

Avec des quantificateurs : $\forall y \in F, \exists x \in E; y = f(x)$



Propriété 6 :

soit $f : E \rightarrow F$. f est surjective si et seulement si $f(E) = F$

▷ *Preuve* : immédiat avec la définition de $f(E)$!

◁

Exemples :

▶ $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

▶ $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$



Méthode :

MONTRER LA SURJECTIVITÉ

Pour montrer qu'une application $f : E \rightarrow F$ est surjective, on pourra :

- Si f est une fonction dérivable, l'étude des variations de f peut permettre de déterminer $f(E)$. On vérifie alors si $f(E) = F$.
- Poser $y \in F$ et résoudre l'équation d'inconnue $x : f(x) = y$

La lettre y est alors un paramètre : on va chercher à résoudre sans connaître ce y . Si cette équation a toujours au moins une solution, quelle que soit la valeur de y , alors f est surjective et si on trouve au moins un y pour lequel il n'y a pas de solution, elle n'est pas surjective.

3) Bijections

a) Définition :



Définition : bijectivité

Une application $f : E \rightarrow F$ est dite **bijective** si et seulement si elle est à la fois surjective et injective. Autrement dit, f est bijective si et seulement si tout élément de F admet un et un seul antécédent dans E .

Ce que l'on peut écrire sous la forme

$$\forall y \in F, \exists! x \in E; f(x) = y$$

Exemple :

- $f : \begin{matrix} \mathbb{R}_+ & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{matrix}$ n'est pas bijective car non surjective
- $f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto e^x \end{matrix}$ est bijective.
- $f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto |x| \end{matrix}$ n'est pas bijective (car non injective).

b) Bijection réciproque

Un des intérêts des bijections est d'avoir la possibilité de "revenir en arrière" :



Définition : bijection réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$ une application bijective. On appelle **bijection réciproque** l'application notée f^{-1} définie de la manière suivante :

pour tout $y \in F$ on note $f^{-1}(y)$ l'unique antécédent de y par f .

Ainsi : $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) = y$

Remarques :

Dans la définition, on a utilisé la variable y pour parler d'un élément de F . Cela permet de la distinguer de la variable x , utilisé précédemment pour un élément de E .

Néanmoins, en pratique, on utilisera aussi la variable x pour f^{-1} , en précisant soigneusement l'ensemble d'appartenance.



Au secours !

ENCORE CETTE NOTATION !

A nouveau, on retrouve le f^{-1} d'apparence ambiguë, avec cette fois $f^{-1}(x)$.

Attention ainsi à ne pas confondre $f^{-1}(x)$ et $f(x)^{-1}$!

A noter que cette notation est cohérente avec l'image réciproque : $f^{-1}(x)$ donne l'antécédent par f de x , tout comme $f^{-1}(A)$ donne l'ensemble des antécédents des éléments de A .

**Theorème 2 :**

Soit f une application de E dans F

f est bijective si et seulement si il existe $g : F \rightarrow E$ vérifiant SIMULTANEMENT les deux conditions suivantes :

(i) $\forall x \in E, g \circ f(x) = x$ (c'est à dire $g \circ f = Id_E$)

(ii) $\forall y \in F, f \circ g(y) = y$ (c'est à dire $f \circ g = Id_F$)

L'application g ainsi définie est en fait f^{-1} .

▷ *Preuve* :

◁

Exemples :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\exp(\ln(x)) = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\ln(e^x) = x$. Ainsi, $\ln$ est la bijection réciproque de $\exp$.
- Pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{x^2} = x$ et $(\sqrt{x})^2 = x$. Ainsi, la racine carrée est la bijection réciproque du carré, quand on restreint celui-ci à $\mathbb{R}_+$.

c) Composition de bijection**Propriété 7 :**

Soient E, F et G trois ensembles et soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications bijectives. Alors $g \circ f$ est bijective, et sa bijection réciproque est

▷ *Preuve* :

◁

d) Représentation graphique de la réciproque :



Propriété 8 :



Soit f une fonction bijective à valeur dans $\mathbb{R}$ et soit f^{-1} sa bijection réciproque.

Soit $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ celle de f^{-1} .

Alors $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

En effet, soit $M \in \mathcal{C}_f$. En notant $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, le symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ est $M' \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$.

Or $M \in \mathcal{C}_f$, donc en fait $y = f(x)$, et comme f est bijective, on a $x = f^{-1}(y)$.

Ainsi $M' \begin{pmatrix} y \\ f^{-1}(y) \end{pmatrix}$, c'est à dire que le point M' est sur la courbe représentative de f^{-1} .

e) Cas particuliers de bijections



Theorème 3 : théorème de la bijection monotone

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

Si f est strictement monotone sur E , alors $f : E \rightarrow f(E)$ est bijective et sa réciproque est de même monotonie.

▷ Preuve :

En particulier, si on a affaire à une fonction continue sur un intervalle, le théorème des valeurs intermédiaire permet de donner :



Theorème 4 :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I . Alors f est bijective de I dans l'intervalle $J = f(I)$.

En particulier, si $I = [a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, alors

- Si f est une fonction continue et strictement croissante sur $[a, b]$, alors f est une bijection de $[a, b]$ dans $[f(a), f(b)]$.
- Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur $[a, b]$, alors f est une bijection de $[a, b]$ dans $[f(b), f(a)]$.

Remarque :

Dans le cas où I un intervalle avec une ou des bornes infinies ou ouvertes, on utilisera des limites et l'intervalle image est ouvert.

Exemple de bijection réciproque : racine n -ième :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère la fonction $f : x \mapsto x^n$.

Celle ci est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f' : x \mapsto nx^{n-1}$.

Les variations de f dépendent de la parité de n :

Autotest :

- ☐ Que signifie $x \in A$? $A \subset B$? $\bar{A}$?
- ☐ Comment montrer $A \subset B$?
- ☐ Qu'est-ce qu'une application ? Que note-t-on $f(A)$ et $f^{-1}(B)$?
- ☐ Si on parle de $f^{-1}(B)$, où B est un ensemble, est-ce que ça veut dire qu'on parle de la bijection réciproque de f ?
- ☐ Qu'est ce qu'une application injective ? Surjective ? Bijective ? Donner des exemples pour chacune de ces définitions.
- ☐ Énoncez la caractérisation de la bijection à partir de l'existence d'une fonction g vérifiant certaines propriétés.
- ☐ Comment peut-on (parfois) obtenir l'expression de f^{-1} ?
- ☐ Présenter la fonction racine n -ième.