

Analyse- Chapitre 2 : Fonctions usuelles

2026-2027

1 Encore un peu de bijectivité

Exercice 1 :

Montrer que $f : x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$ est bijective de $] -1; 1[$ dans $\mathbb{R}$ et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = x \ln(x) - \frac{1}{x}$ sur $I =]0; +\infty[$.

1. Montrer que f est dérivable et strictement monotone sur I .
2. En déduire que f est une bijection de I dans un intervalle J à déterminer.
3. On note g la réciproque de f . Calculer $g(-1)$ et $g'(-1)$.

2 Autour de la famille exponentielle

Exercice 3 :

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

1. $2^{x^2} = 3^{x^3}$

2. $2^{x+1} + 4^x = 15$

3. $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 2$

Exercice 4 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^x$.

1. Déterminez les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. On prolonge maintenant f par continuité en 0, en posant $f(0) = 1$.
 - a) justifiez que $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$
 - b) Etudiez le taux d'accroissement de f en 0 et en déduire l'équation de la tangente à la courbe de f en 0.
3. Etudiez les variations de f et tracer sa courbe représentative.

Exercice 5 :

Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$(S_1) \begin{cases} 8^x &= 10y \\ 2^x &= 5y \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x + y &= 7 \\ \log x + \log y &= 1 \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} x^2 - y^2 &= 12 \\ \ln x - \ln y &= \ln 2 \end{cases}$$

3 Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 6 :

Calculer :

$$\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right), \operatorname{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ et } \operatorname{Arctan}(-\sqrt{3})$$

$$\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right), \operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right), \operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right),$$

$$\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)\right), \operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{-27\pi}{13}\right)\right), \operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{-11\pi}{5}\right)\right), \operatorname{Arcsin}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Exercice 7 :

Soit $\psi : x \mapsto \operatorname{Arccos}(\cos(x))$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de ψ .
2. Donner un intervalle I sur lequel ψ se simplifie de manière immédiate et préciser cette expression.
3. Étudier la périodicité et la parité de ψ .
4. Tracer la courbe représentative de ψ .

Exercice 8 :

Justifiez que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$ et en déduire que :

$$\forall x \in [-1; 1], \operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 9 :

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$. Quelle valeur pour $x < 0$?
2. Montrez que pour tout $x \in]-1, 1[$, $2 \arctan x = \arctan \left(\frac{2x}{1-x^2} \right)$.

Exercice 10 :

Soit $f : x \mapsto \arctan(\sqrt{1+x^2} - x)$.

1. Déterminez l'ensemble de définition et le domaine de dérivabilité de f .
2. Calculez sa dérivée et en déduire une expression plus simple de f .

Exercice 11 :

On considère la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition, et calculer f' .
3. En déduire une expression plus simple de $f(x)$.

Exercice 12 :

Montrer que pour tout $x \in [0; 1]$, on a $\operatorname{Arccos}(2x^2 - 1) = 2\operatorname{Arccos}(x)$.

4 Fonction hyperboliques :

Exercice 13 :

Résoudre les équations suivantes

1. $\operatorname{sh}(x) = 1$
2. $\operatorname{ch}(x) = 2$
3. $5 \operatorname{ch}(x) - 3 \operatorname{sh}(x) = 4$
4. $3 \operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x) = 1$

Exercice 14 :

Montrer que tout $x \in \mathbb{R}$:

1. $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$.
2. $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y)$.

Exercice 15 :

Montrer que pour tout $x \in [0; +\infty[$, $\operatorname{sh}(x) \geq x$ et en déduire que pour tout $x \in [0; +\infty[$, $\operatorname{ch}(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$.

Exercice 16 :

Soient $A_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(kx)$ et $B_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(kx)$.

1. Calculez $A_n + B_n$ et $A_n - B_n$.
2. En déduire les valeurs de A_n et B_n .