

## Programme de colle S5

### Notions au programme

- Chapitre 2, Compléments de calcul matriciel : *en totalité.*
- Chapitre 3, Vers la réduction des endomorphismes : *en totalité.*

### Démonstrations à connaître

#### Étage 1 / Poussin

- [Ch3 §I.3 P1–P3] Deux matrices semblables ont même trace, même déterminant, même rang.
- [Ch3 §II.2 P4] Famille génératrice d'une somme de s.e.v.
- [Ch3 §II.3 P1] Une somme de s.e.v. est directe *si et seulement si* le vecteur nul s'y décompose de façon unique.

#### Étage 2 / Poulet

- [Ch2 §IV] Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.
- [Ch3 §I.3] Deux matrices semblables ont les mêmes polynômes annulateurs.
- [Ch3 §II.2 Lemme+P1+P3] Une somme de s.e.v. de  $E$  est un s.e.v. ; si tous les s.e.v. sont de dimension finie, leur somme également, et leur dimension est majorée par la somme des dimensions.

#### Étage 3 / Super-Poulet

- [Ch2 §III.2] Expression du déterminant de Vandermonde
- [Ch3 §II.4] Théorème de fractionnement/juxtaposition de bases
- [Ch3 §II.3 P3] Une somme de s.e.v. de dimension finie est directe *si et seulement si* sa dimension est égale à la somme des dimensions.

### Exercices à savoir refaire

#### Compléments de calcul matriciel

- [Exercice 7] Recherche de polynômes annulateurs d'une matrice donnée.

- [Exercice 8, Q1] Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie admet au moins un polynôme annulateur non nul, de degré au plus  $n^2$ .
- [Exercice 11] Interpolation de Lagrange en 3 points explicites.
- [Exercice 14] Application du déterminant de Vandermonde à la liberté d'une famille d'exponentielles.
- [Exercice 15] Suite de déterminants tridiagonaux
- [Exercice 16] Inverse d'une matrice triangulaire supérieure par blocs, à 2 blocs diagonaux.
- [Exercice 18] Déterminant de la matrice définie par blocs  $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

### Réduction des endomorphismes (1/2)

- [Exercices 3, 4] Montrer que deux matrices ne sont pas semblables.
- [Exercice 6] Montrer que deux matrices  $A$  et  $B$  sont semblables par analyse-synthèse, et exhiber  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que  $A = P B P^{-1}$ .
- [Exercice 7] Sommes de 3 espaces de matrices.
- [Exercice 8] Les matrices symétriques et antisymétriques forment des sous-espaces supplémentaires dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- [Exercice 13] dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

### Compétences attendues

#### Compléments de calcul matriciel

- Mobiliser les propriétés formelles de la trace [→ §I]
- Connaître l'expression formelle des coefficients d'un produit de matrices [→ §I : **preuve de**  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ ]
- Écrire correctement un polynôme de matrice ou d'endomorphisme **sans oublier l'identité**. [→ §II.1, ex. 3]
- Maîtriser le formalisme nécessaire aux polynômes d'endomorphismes [→ ex. 4, ex.8 Q2]
- Exploiter un polynôme annulateur pour prouver qu'une matrice est inversible, et exprimer son inverse comme combinaison linéaire des premières puissances de la matrice [→ ex 9]
- Exploiter un polynôme annulateur pour exprimer les puissances d'une matrice comme combinaison linéaire de ses premières puissances (à l'aide d'une division euclidienne de polynômes) [→ ex. 10]
- Mobiliser la définition abstraite des polynômes interpolateurs de Lagrange.

- Calculer concrètement les polynômes annulateurs de Lagrange [→ ex. 11, Q1]
- Résoudre concrètement le problème d'interpolation de Lagrange [→ ex. 11, Q3]
- Déterminer les coordonnées d'un polynôme dans la base d'interpolation de Lagrange [→ ex. 11, Q2]
- Reconnaître un déterminant de Vandermonde. Mobiliser sa formule explicite sans erreur de détail [→ ex. 12, 13, 14]
- Déterminer une relation de récurrence satisfaite par une suite de déterminants [→ ex. 15].
- Reconnaître une structure par blocs dans une matrice donnée, en particulier les matrices triangulaires et diagonales par blocs [→ ex. 17]
- Calculer avec des matrices définies par blocs : connaître les contraintes de compatibilité de découpage (pour les sommes et produits) ; ne pas intervertir les facteurs dans les calculs de produits.
- Mobiliser les déterminants par blocs [→ ex. 18].

- Montrer que des sous-espaces sont supplémentaires en prouvant qu'ils sont en somme directe et en observant les dimensions [→ §II.4, ex. 9]
- Montrer que des sous-espaces sont supplémentaires par fractionnement de bases [→ §II.4, ex. 9bis, ex. 10]
- Construire une base adaptée à des sous-espaces supplémentaires par juxtaposition de bases [→ §II.4, ex. 11]
- Montrer qu'un sous-espace est stable par la définition [→ §III.1, ex. 12] ou en observant juste les images d'une famille génératrice [→ §III.1 ex. 12bis]
- Connaître précisément la notion d'endomorphisme induit et savoir comment observer sa matrice [→ §III.1, §III.2]
- Traduire matriciellement qu'un sous-espace est stable / que des sous-espaces supplémentaires sont stables [→ §III.2]

### Vers la réduction des endomorphismes

- Écrire la matrice d'une application linéaire dans un couple de bases [→ §I.1, ex. 1]
- Écrire l'application linéaire canoniquement associée à une matrice [→ §I.1, ex. 2]
- Montrer que deux matrices sont semblables en prouvant qu'elles représentent un même endomorphisme [→ §I.2, §I.5, ex. 6]
- Montrer que deux matrices ne sont pas semblables en constatant qu'elles n'ont pas la même trace/déterminant/rang, les mêmes polynômes annulateurs [→ §I.3, ex. 3, 4]
- Connaître la dimension d'un produit cartésien. En fabriquer une base. [→ §II.1, exemple de  $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ]
- Décomposer un vecteur sur une somme de sous-espaces en résolvant une équation [→ §II.3, ex. 7 Q2]
- Fabriquer une famille génératrice d'une somme en juxtaposant des familles génératrices [→ §II.2]
- Identifier les composantes dans les sommes de vecteurs appartenant à des sous-espaces en somme directe [→ §II.3]
- Montrer qu'une somme est directe en prouvant que le vecteur se décompose de façon unique sur cette somme [→ §II.3, ex. 7 Q1]
- Montrer que des sous-espaces sont supplémentaires par la définition (raisonnement par analyse-synthèse) [→ §II.4, ex. 8]