

DM3 - sommes - injection et surjection

2026-2027



Exercice 1 :

L'objectif de cet exercice est de calculer $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ pour tout entier $n \geq 1$.

1. Justifiez que $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$
2. Montrez que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$ on a l'égalité : $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$
3. En déduire que $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}$.
4. Montrez enfin que $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$.

1. Le terme pour $k = 0$ vaut 0 et peut donc être ignoré dans la somme. Ainsi $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$.
2. Remarquons déjà que $k \geq 1$, donc $k-1 \geq 0$ et $(k-1)!$ a un sens. Il suffit maintenant de vérifier ce qui est demandé en calculant et en arrangeant les calculs pour que cela marche :

$$k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

D'autre part :

$$n \binom{n-1}{k-1} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

D'où l'égalité.

Conclusion : $\boxed{k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}}$

Remarque : on peut également utiliser la "petite formule" du cours, mais l'idée était plus de le refaire...

3. Il s'agit juste de remplacer avec la formule précédente et de factoriser par n , qui ne dépend pas de k dans la somme.
4. Avec un changement d'indice, on a :

$$\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}$$

où on a posé $i = k - 1$.

D'après le binôme de Newton :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} 1^i 1^{n-1-i} = 2^{n-1}$$

Et donc finalement :

$$\boxed{\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n 2^{n-1}}$$



Exercice 2 :

On rappelle pour cet exercice que si f est continue sur un intervalle I , alors f admet une primitive sur I .

Par ailleurs, on rappelle que si F et G sont deux primitives de f , alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F = G + C$.

On considère l'ensemble $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$: c'est l'ensemble des fonctions dérivables une infinité de fois. Par exemple les polynômes sont tous des fonctions de E , puisqu'on peut dériver autant de fois que l'on veut (à partir d'un moment, ça donne toujours 0.)

De même, la fonction exponentielle est dans E .

On définit sur E les applications φ et Φ suivantes :

- Pour tout $f \in E$, $\varphi(f) = f'$ où f' désigne la dérivée de f .
- Pour tout $f \in E$, $\Phi(f)$ est l'unique primitive F de f tel que $F(0) = 0$.

1. Déterminez l'ensemble des fonctions f tel que $\varphi(f) = 0$
2. φ est-elle injective ?

3. Montrez que Φ est injective.
4. Déterminez $\varphi \circ \Phi$.
5. Montrez que $\varphi : E \rightarrow E$ est surjective.
6. Montrez que $\Phi : E \rightarrow E$ n'est pas surjective.

1. Si $\varphi(f) = 0$, alors $f' = 0$ donc f est constante. Réciproquement, si f est constante, $f' = 0$ également. L'ensemble des fonctions vérifiant $\varphi(f) = 0$ est donc l'ensemble des fonctions constantes.
2. Il y a une infinité de fonctions constantes. Ainsi, la fonction nulle a une infinité d'antécédents distincts par φ . La fonction φ n'est donc pas injective.
3. Supposons que $\Phi(f) = \Phi(g)$ pour $f, g \in E$.
Alors $\Phi(f)$ et $\Phi(g)$ sont des primitives respectivement de f et g . Si on dérive l'égalité de départ, on a donc

$$(\Phi(f))' = (\Phi(g))', \text{ et donc } f = g$$

Autrement dit, Φ est injective.

4. Pour tout $f \in E$, $\Phi(f)$ est une primitive de f , donc

$$\varphi(\Phi(f)) = (\Phi(f))' = f$$

Ainsi, $\varphi \circ \Phi = id_E$.

5. La question précédente peut aider pour celle-ci ! Pour tout $f \in E$, on a $\varphi(\Phi(f)) = f$, donc $\Phi(f)$ est un antécédent de f par φ .
Ainsi φ est surjective.
6. Toutes les images par Φ vérifient qu'elles s'annulent en 0. La fonction constante égale à 1 est bien dans E , mais elle ne s'annule pas en 0 : elle ne peut donc pas être une image d'un élément de E par Φ et Φ n'est donc pas surjective.