

Etude de fonction, bijection

DM 2

2026-2027



Exercice 1 :

Soit la fonction f définie par

$$f : x \mapsto \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

1. Partie 1 : Etude de f

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Montrez que f est paire.
- Justifiez que f est dérivable sur son domaine de définition et calculez l'expression de sa dérivée.
- Établir le tableau de variation de f en précisant les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
- Tracer la courbe représentative de f en faisant apparaître explicitement les propriétés remarquées dans l'étude.

2. Partie 2 : Bijektivité

- Justifiez que f restreinte à $[0, +\infty[$ est une bijection de $[0, +\infty[$ dans un intervalle à déterminer.
- Donner le tableau de variation de f^{-1} , complété par les limites. (indication : ne cherchez surtout pas à dériver...)
- Tracer la courbe de f^{-1} .

3. Partie 3 : Expression explicite de la réciproque

- Soit $y \in]0, \frac{1}{2}]$. On considère l'équation

$$x^2 - \frac{1}{y}x + 1 = 0$$

- Justifiez que $1 - 4y^2 \geq 0$ et en déduire que cette équation admet deux solutions réelles, que l'on notera r_1 et r_2 .
- Montrez que r_1 et r_2 sont positives, et que $r_1 r_2 = 1$.
- En déduire que la plus grande des deux solutions est nécessairement supérieur ou égale à 1.
- Soit $y \in]0, \frac{1}{2}]$. Résoudre l'équation

$$\frac{1}{e^x + e^{-x}} = y$$

On pourra poser $X = e^x$.

- Déterminez f^{-1} .

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$, d'où $e^x + e^{-x} > 0$ et donc $e^x + e^{-x} \neq 0$. Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \frac{1}{e^{-x} + e^{-(-x)}} = \frac{1}{e^{-x} + e^x} = f(x)$.

La fonction est bien paire.

- Par composition, somme et quotient de fonction dérivable f est dérivable et on a

$$f'(x) = -(e^x - e^{-x}) \frac{1}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^{-x} - e^x}{(e^x + e^{-x})^2}$$

- La dérivée est du signe de $e^{-x} - e^x$.

Or, $e^{-x} - e^x \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \geq e^x \Leftrightarrow -x \geq x$ par strict croissance de $\ln$.

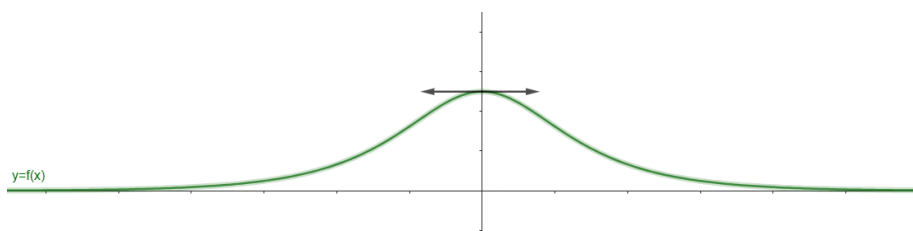
Ainsi, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \geq 2x \Leftrightarrow x \leq 0$.

Les limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont évidentes (pas de forme indéterminées)

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	0	$\frac{1}{2}$	0

- L'étude précédente donne une asymptote horizontale en $+\infty$ et $-\infty$, d'équation $y = 0$ (c'est l'axe des abscisses) et une tangente en 0 , horizontale, d'équation $y = \frac{1}{2}$.

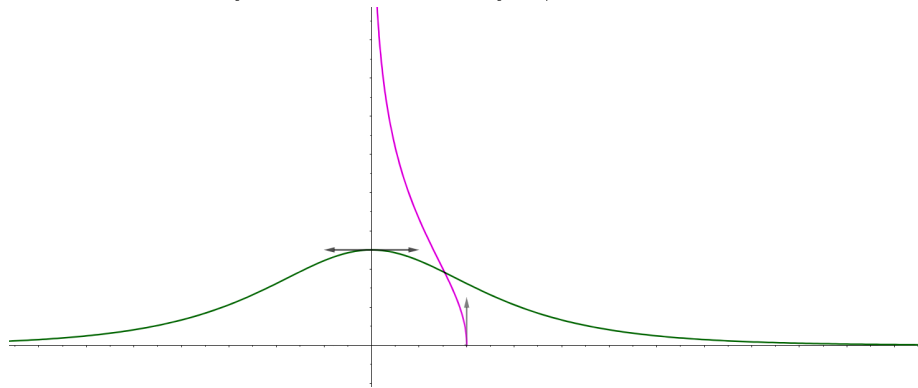


2. a) f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et est continue, donc f est une bijection de $[0, +\infty[$ dans $f([0, +\infty[) =]0; \frac{1}{2}]$
 (attention à ne pas se tromper sur les bornes : le 0 est exclu dans l'ensemble d'arrivée, puisque c'est une limite à l'infini. La valeur $\frac{1}{2}$ est incluse puisqu'elle est atteinte (c'est $f(0)$).)
 b) f^{-1} est de même monotonie que f et on a donc

x	0	$\frac{1}{2}$
f^{-1}	$+\infty$	0

- c) On commence par retracer la courbe de f , en notant la tangente horizontale en 0.
 On effectue ensuite la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$. La tangente horizontale se transforme alors en tangente verticale en $\frac{1}{2}$ (f^{-1} n'est donc pas dérivable en ce point....)

Avec en vert la courbe en f et en rose celle de f^{-1} , cela donne :



3. a) L'équation

$$x^2 - \frac{1}{y}x + 1 = 0$$

est une équation du second degré, avec un discriminant $\Delta = \frac{1}{y^2} - 4 = \frac{1 - 4y^2}{y^2}$

Comme $y \in]0, \frac{1}{2}]$, on a $0 < y^2 \leq \frac{1}{4}$, d'où $-1 \leq -4y^2 < 0$ et finalement $0 \leq 1 - 4y^2 \leq 1$.

Ainsi, $\Delta \geq 0$ et l'équation admet deux solutions, r_1 et r_2 , confondues si $y = \frac{1}{2}$.

- b) Comme $y > 0$, $\sqrt{y^2} = y$ et donc $\sqrt{\Delta} = \frac{\sqrt{1 - 4y^2}}{y}$

$$\text{Ainsi, } r_1 = \frac{\frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1-4y^2}}{y}}{2} = \frac{1 + \sqrt{1-4y^2}}{2y} \text{ et } r_2 = \frac{1 - \sqrt{1-4y^2}}{2y}$$

A nouveau, étant donné que $y > 0$, r_1 est immédiatement positive ou nulle.

pour r_2 , on sait que $0 \leq 1 - 4y^2 \leq 1$, donc $0 \leq \sqrt{1 - 4y^2} \leq 1$ et donc $1 - \sqrt{1 - 4y^2} \geq 0$. Ainsi $r_2 \geq 0$ également.

Enfin r_1 et r_2 sont les deux racines du polynôme, donc $r_1 r_2 = \frac{1}{1} = 1$

version alternative : r_1 et r_2 sont racines du polynôme, donc $r_1 r_2 = 1 \geq 0$. Ainsi r_1 et r_2 sont de même signe. Comme r_2 est clairement positive, par somme et quotient de nombre positifs, r_1 l'est aussi.

version alternative 2 : r_1 et r_2 sont racines du polynôme, donc $r_1 r_2 = 1 \geq 0$. Ainsi r_1 et r_2 sont de même signe. De plus, $r_1 + r_2 = -\frac{-1}{y} = \frac{1}{y} > 0$, donc r_1 et r_2 ne sont pas négatif tous les deux. Ils sont donc tous deux positifs.

c) Supposons que les deux racines sont inférieures strict à 1.

On a alors $0 \leq r_1 < 1$ et $0 \leq r_2 < 1$, donc $r_1 r_2 < 1$, c'est à dire $1 < 1$: c'est absurde.

Ainsi l'une au moins des racines est supérieure à 1. L'autre est alors nécessairement plus petite que 1 : on peut faire une disjonction de cas :

si $r_1 \geq 1$, alors comme $r_2 \geq 0$, $r_1 r_2 \geq r_2$ donc $1 \geq r_2$: on aurait r_2 plus petit que 1.

Si c'est $r_2 \geq 1$, on obtient de la même façon $r_1 \leq 1$.

Dans tous les cas, l'une est plus grande que 1, l'autre plus petite.

d) Comme $y \neq 0$, on peut écrire :

$$\frac{1}{e^x + e^{-x}} = y \Leftrightarrow e^x + e^{-x} = \frac{1}{y}$$

Posons maintenant $X = e^x$. L'équation devient

$$X + \frac{1}{X} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{X^2 + 1 - \frac{X}{y}}{X} = 0 \Leftrightarrow X^2 - \frac{1}{y}X + 1 = 0$$

On retrouve le polynôme de la question 3a).

Ainsi $X = r_1$ ou $X = r_2$, c'est à dire $x = \ln(r_1)$ ou $x = \ln(r_2)$.

e) Soit $y \in]0, \frac{1}{2}]$. On cherche maintenant l'unique $x \geq 0$ tel que $f(x) = y$ (on sait qu'il n'y en a qu'un puisqu'on a montré que f était bijective sur $[0, +\infty[$).

Cela donne la même équation que la question d), avec cette fois $x \geq 0$, donc $e^x \geq 1$.

Il faut donc prendre la racine qui est supérieure à 1, qui est la plus grande des deux, Donc

$e^x = r_1$ et finalement $x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4y^2}}{2y}\right)$.

Ainsi,

$f^{-1} : \begin{array}{ccc} & \left] 0, \frac{1}{2} \right] & \rightarrow [0, +\infty[\\ x & \mapsto \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4x^2}}{2x} \right) \end{array}$
