

Programme de colle S6

Notions au programme

- **Chapitre 3, Vers la réduction des endomorphismes** : *en totalité*.
- **Chapitre 4, Suites et séries de fonctions** : §I Modes de convergence des suites de fonction et §II.1 Théorème de transfert de continuité

Démonstrations à connaître

Étage 1 / Poussin

- [Ch3 §I.3 P1–P3] Deux matrices semblables ont même trace, même déterminant, même rang.
- [Ch3 §III.1] Sous-espaces vectoriels automatiquement stables : si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ commutent, alors $\text{Ker}(v)$ est stable par u ; si $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $\text{Ker}(P(u))$ est stable par u .
- [Ch4 §I.3] La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Étage 2 / Poulet

- [Ch3 §II.3 P1] Une somme de s.e.v. est directe *si et seulement si* le vecteur nul s'y décompose de façon unique.
- [Ch3 §II.2 Lemme+P1+P3] Une somme de s.e.v. de E est un s.e.v. ; si tous les s.e.v. sont de dimension finie, leur somme également, et leur dimension est majorée par la somme des dimensions.
- [Ch3 §II.3 P1] Une somme de s.e.v. est directe *si et seulement si* le vecteur nul s'y décompose de façon unique.

Étage 3 / Super-Poulet

- [Ch3 §II.4] Théorème de fractionnement/juxtaposition de bases
- [Ch3 §I.2] Deux matrices sont semblables *si et seulement si* elles représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes.
- [Ch4 §II.2] Théorème d'interversion limite / intégrale sur un segment.

Exercices à savoir refaire

Vers la réduction des endomorphismes

- [Exercices 3, 4] Montrer que deux matrices ne sont pas semblables.
- [Exercice 5] Diagonalisation concrète d'une symétrie.
- [Exercice 6] Montrer que deux matrices A et B sont semblables par analyse-synthèse, et exhiber $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P B P^{-1}$.
- [Exercice 8] Les matrices symétriques et antisymétriques forment des sous-espaces supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Suites et séries de fonctions

- [Exercice 9] Modes de convergence de $(f_n)_{n \geq 0}$ pour $f_n : x \mapsto \frac{nx^2 + 1}{nx + 1}$.
- [Exercice 11] Modes de convergence de $(f_n)_{n \geq 0}$ pour $f_n : x \mapsto \arctan(nx)$.

Compétences attendues

Vers la réduction des endomorphismes

- Distinguer les différents objets nuls : zéro 0 (ou polynôme nul), vecteur nul 0_E , matrices nulles 0_n ou $0_{n,p}$, suite nulle $(0)_{n \geq 0}$, fonction nulle $x \mapsto 0$, endomorphisme nul $0 = 0_{\mathcal{L}(E)}$, espace nul $\{0_E\}$
- Écrire la matrice d'une application linéaire dans un couple de bases [→ §I.1, ex. 1]
- Écrire l'application linéaire canoniquement associée à une matrice [→ §I.1, ex. 2]
- Montrer que deux matrices sont semblables en prouvant qu'elles représentent un même endomorphisme [→ §I.2, §I.5, ex. 6]
- Montrer que deux matrices ne sont pas semblables en constatant qu'elles n'ont pas la même trace/déterminant/rang, les mêmes polynômes annulateurs [→ §I.3, ex. 3, 4]
- Connaître la dimension d'un produit cartésien. En fabriquer une base. [→ §II.1, exemple de $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$]
- Décomposer un vecteur sur une somme de sous-espaces en résolvant une équation [→ §II.3, ex. 7 Q2]
- Fabriquer une famille génératrice d'une somme en juxtaposant des familles génératrices [→ §II.2]
- Identifier les composantes dans les sommes de vecteurs appartenant à des sous-espaces en somme directe [→ §II.3]

- Montrer qu'une somme est directe en prouvant que le vecteur se décompose de façon unique sur cette somme [→ §II.3, ex. 7 Q1]
- Montrer que des sous-espaces sont supplémentaires par la définition (raisonnement par analyse-synthèse) [→ §II.4, ex. 8]
- Montrer que des sous-espaces sont supplémentaires en prouvant qu'ils sont en somme directe et en observant les dimensions [→ §II.4, ex. 9]
- Montrer que des sous-espaces sont supplémentaires par fractionnement de bases [→ §II.4, ex. 9bis, ex. 10]
- Construire une base adaptée à des sous-espaces supplémentaires par juxtaposition de bases [→ §II.4, ex. 11]
- Montrer qu'un sous-espace est stable par la définition [→ §III.1, ex. 12] ou en observant juste les images d'une famille génératrice [→ §III.1 ex. 12bis]
- Connaître précisément la notion d'endomorphisme induit et savoir comment observer sa matrice [→ §III.1, §III.2]
- Traduire matriciellement qu'un sous-espace est stable / que des sous-espaces supplémentaires sont stables [→ §III.2]

- Nier la convergence uniforme en considérant une suite de points tendant vers une zone où la convergence se fait « mal » [→ §I.3, ex. 8 Q2, ex. 9 Q2, ex 10 Q2]

Révisions d'analyse

- Manipulation d'inégalités : majoration d'un quotient d'expressions positives, application de fonctions monotones
- Étude des variations d'une fonction dérivable sur un intervalle
- Courbes représentatives des fonctions associées

Suites et séries de fonctions

- Étudier la convergence simple d'une suite de fonctions en fixant la variable x et en faisant tendre n vers l'infini [→ §I.1, ex. 1, 6, 7, 9, 10], au besoin par disjonction de cas sur la variable [→ ex. 2, 11]
- Majorer une norme uniforme $\|f\|_{\infty}^I$ en majorant $|f(x)|$ [→ §I.2, ex. 3, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14]
- Conjecturer la valeur exacte de $\|f\|_{\infty}^I$ à l'aide de la courbe de la fonction f [→ §I.2, ex. 4, ex. 8, ex. 10]
- Calculer la valeur exacte de $\|f\|_{\infty}^I$ en étudiant les variations de la fonction f [→ §I.2, ex. 5, 7, 13 Q2]
- Prouver la convergence uniforme d'une suite de fonctions sur un intervalle I [→ §I.3, ex. 6, 7, 9, 12, 13 Q3], sur tout segment de I [→ §I.4, ex. 9 Q1], sur tout segment symétrique quand I est symétrique [→ §I.4, ex. 10]
- Nier la convergence uniforme en utilisant la non-continuité de la fonction limite [→ §II.1, ex. 11, 13]