

THERM-DIFFUSION-Exercice 1

Le coefficient de diffusion du sucre dans l'eau est noté D_S . Une solution sucrée possède, à l'instant $t = 0$, une concentration en sucre dépendant de l'abscisse x selon une loi de la forme :

$$c(x, t = 0) = c_0 + c_1 \cos(2\pi x / \Lambda) \text{ où } c_0, c_1 \text{ (} c_1 \ll c_0 \text{) et } \Lambda \text{ sont des constantes.}$$

L'évolution ultérieure de la concentration est cherchée sous la forme : $c(x, t) = c_0 + f(t) \cos(2\pi x / \Lambda)$

a-Etablir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la concentration $c(x, t)$.

b-Déterminer, en fonction de D_S et Λ l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par la fonction $f(t)$.

Résoudre cette équation en tenant compte des conditions initiales.

Exprimer $f(t)$ en fonction de c_1 , t et d'un temps caractéristique τ_1 à écrire en fonction de D_S et Λ .

Quel sens concret donnez-vous au paramètre τ_1 ?

c-Représenter graphiquement, pour $t > 0$ donné, l'évolution de la concentration $c(x, t)$ en fonction de x .

Tracer également la distribution limite $c(x, t \rightarrow \infty)$.

d-L'indice de réfraction de l'eau sucrée varie, aux faibles concentrations, selon une loi quasi linéaire :

$n = n_e + \beta c$, avec $n_e = 1,33$ et $\beta = 0,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$. Une cuve à faces parallèles, d'épaisseur d , est remplie d'une solution dont la concentration en sucre, à l'instant $t = 0$, varie de façon périodique avec une période spatiale Λ . Après une phase initiale, la concentration de sucre peut être décrite par la loi de la question c-.

Cette cuve est insérée dans un montage optique et l'éclairement observé sur l'écran à l'instant t peut s'écrire :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 [1 + (\xi c_1 d) \exp(-t / \tau_1) \cos(2\pi x / \Lambda)] \text{ où } \xi = 7,5 \cdot 10^3 \text{ m}^2 \cdot \text{mol}^{-1}. \text{ Qu'observe-t-on sur l'écran ?}$$

e-En pratique, les franges sont visibles si leur contraste est supérieur à une valeur $\Gamma_{\min} = 0,01$.

Pour une cuve d'épaisseur d donnée, exprimer la plus petite variation de concentration $c_{\min}$ décelable initialement, en fonction de $\Gamma_{\min}$, ξ et d .

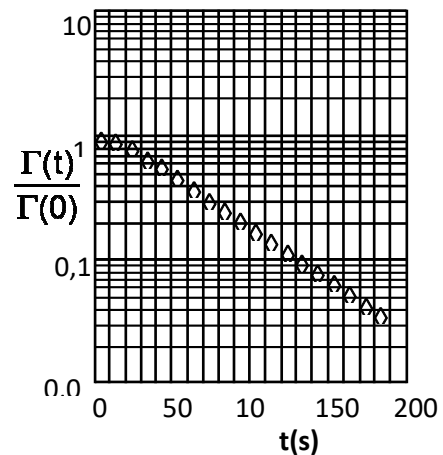
Calculer numériquement $c_{\min}$ en $\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$ pour $d = 1,0 \text{ mm}$.

f-La figure ci-contre représente le contraste normalisé,

$\Gamma(t)/\Gamma(0)$, en fonction du temps (en secondes), obtenu pour une répartition initiale de période spatiale $\Lambda = 1 \text{ mm}$.

Expliquer pourquoi les premiers points ne sont pas alignés avec les autres.

Déduire de ces résultats la valeur numérique du coefficient de diffusion D_S du sucre dans l'eau.



THERM-DIFFUSION-Exercice 1

a- Bilan de particules à une dimension en géométrie cartésienne pour un volume Sdx compris entre x et $x+dx$:

$$c(x,t+dt).Sdx = c(x,t)Sdx + j_{nx}(x,t)Sdt - j_{nx}(x+dx,t)Sdt \quad \text{d'où : } \frac{\partial c}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial j_{nx}}{\partial x}(x,t) = 0$$

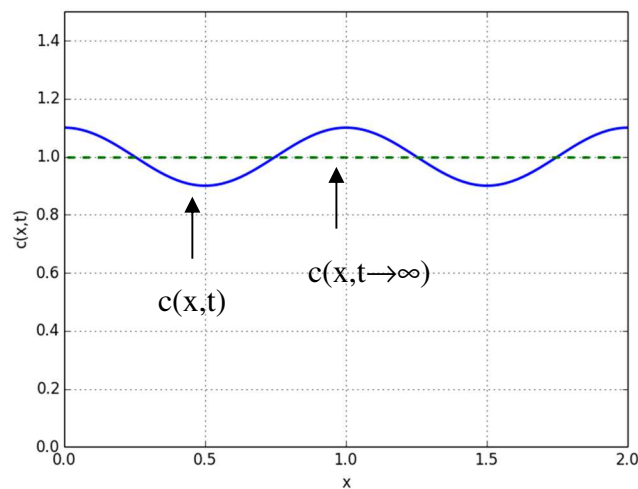
Avec la loi de Fick : $j_{nx} = -D_s \frac{\partial c}{\partial x}(x,t)$, on obtient : $\frac{\partial c}{\partial t}(x,t) = D_s \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x,t)$

b-On reporte $c(x,t) = c_0 + f(t) \cos(2\pi x / \Lambda)$ dans l'équation de la diffusion :

$$\frac{df}{dt}(t) \cos(2\pi x / \Lambda) = -\frac{4\pi^2}{\Lambda^2} D_s f(t) \cos(2\pi x / \Lambda) \quad \text{d'où : } \frac{df}{dt}(t) + \frac{4\pi^2}{\Lambda^2} D_s f(t) = 0$$

La solution est : $f(t) = c_1 \exp(-t/\tau_1)$ avec $\tau_1 = \frac{\Lambda^2}{4\pi^2 D_s}$ = temps caractéristique de diffusion

c-



d-L'éclairement dépend sinusoidalement de x donc on observe des franges rectilignes $x = \text{cste}$.

e-Le contraste est : $\Gamma(t) = \xi c_1 \exp(-\frac{t}{\tau_1})$.

Initialement : $\Gamma(0) = \xi c_1 d$. On veut $\Gamma(0) \geq \Gamma_{\min} = 0,01$, d'où : $c_{\min} = \frac{\Gamma_{\min}}{\xi d} = \underline{1,3 \cdot 10^{-3} \text{ mol.m}^{-3}}$

f-Les premiers points ne sont pas alignés car ils correspondent à la phase initiale évoquée question d-

$$\frac{\Gamma(t)}{\Gamma(0)} = e^{-\frac{t}{\tau_1}} \Rightarrow \ln \frac{\Gamma(t)}{\Gamma(0)} = -\frac{t}{\tau_1} \Rightarrow \log \frac{\Gamma(t)}{\Gamma(0)} = -\frac{t}{\tau_1 \ln 10} \quad \text{droite de pente } -\frac{1}{\tau_1 \ln 10}$$

On lit sur la courbe une pente de : $\frac{\log(0,07) - \log(1)}{150 - 0} \approx -7,7 \cdot 10^3$

Donc : $\frac{4\pi^2 D_s}{\Lambda^2} = 7,7 \cdot 10^{-3} \cdot \ln 10$

D'où : $D_s = \underline{4,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}}$