

Exercices

Exercice 1. Bolzano-Weierstrass avec vue sur la mer.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit que n a vue sur la mer lorsque :

$$\forall p \geq n : u_p \leq u_n$$

On note A l'ensemble des entiers qui ont vue sur la mer.

1. On suppose dans cette question que A est infini.
Montrer qu'il existe une suite extraite de u qui est décroissante.
2. On suppose à présent que l'ensemble A est fini.
Montrer qu'il existe une suite extraite de u qui est croissante.
3. Conclure.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que toute sphère $S(a, r)$ est génératrice de E .

Exercice 3. Soit $\ell^\infty(\mathbb{K})$ l'ensemble des suites de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ bornées et

$$\ell^1(\mathbb{K}) = \left\{ u \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \mid \sum u_n \text{ converge absolument} \right\}.$$

1. Montrer que $N_1(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ définit une norme sur $\ell^1(\mathbb{K})$.
2. Montrer que $\ell^1(\mathbb{K}) \subset \ell^\infty(\mathbb{K})$ et comparer les normes N_1 et N_∞ sur $\ell^1(\mathbb{K})$. Ces normes sont-elles équivalentes ?

Exercice 4. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Montrer que le carré $]0; 1[\times]0; 1[$ de $\mathbb{R}^2$ est ouvert.

Même question avec la norme $\|\cdot\|_1$.

Exercice 5. Soit U un ouvert et A une partie d'un espace vectoriel normé E .

Montrer que $A + U$ est ouvert.

Exercice 6. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et soit $x = \sup(A)$.

Montrer que x est adhérent à A .

Exercice 7. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E qui converge vers $\ell \in E$.

Montrer que $\{x_n; \text{ avec } n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est un fermé.

Exercice 8. Soit A et B des parties d'un espace vectoriel normé E .

1. Montrer que $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ et $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

2. Comparer $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overset{\circ}{A \cap B}$ et $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ et enfin $\overset{\circ}{A \cup B}$ et $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.

3. Montrer que $\overset{\circ}{A} = A \setminus \text{fr}(A)$ et $\overline{A} = A \cup \text{fr}(A)$.

Exercice 9. Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

Montrer que :

$$\forall x \in E, \quad x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0.$$

Exercice 10.

1. Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que, si $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$, alors $F = E$.
2. On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, E_1 (resp. P) la partie de E formée des applications de classe $\mathcal{C}^1$ (resp. polynomiales). Montrer que : $\overset{\circ}{E}_1 = \overset{\circ}{P} = \emptyset$.

Banque CCINP

Exercice 11 (CCINP 34). Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé E .

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A , en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que : $x \in \overline{A} \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$.
3. Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E , alors $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel de E .
4. Soient B une autre partie non vide de E . Montrer que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

Exercice 12 (CCINP 45).

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé. On note $\|\cdot\|$ la norme sur E .

Soit A une partie non vide de E . On note $\overline{A}$ l'adhérence de A .

1. (a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
(b) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
2. On pose : $\forall x \in E, d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$.
(a) Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \implies x \in \overline{A}$.
(b) On suppose que A est fermée et que : $\forall (x, y) \in E^2, \forall t \in [0, 1], d_A(tx + (1 - t)y) \leq td_A(x) + (1 - t)d_A(y)$.
Prouver que A est convexe.