

Etudes de fonctions - sommes - ensembles et applications

DS2 - durée : 3h

Conseils (rappel) :

1. Le but d'un DS est de faire le plus de choses justes, et pas le plus de choses possibles : ne cherchez pas à tout faire, mais soyez rigoureux et attentifs dans ce qui est fait.
2. La rigueur de la rédaction et des justifications est essentielle. L'absence de justification supprime tous les points de la question, même si la réponse finale est juste. En particulier, n'oubliez pas de préciser les liens entre vos lignes ("donc", "alors", "d'où", "si et seulement si", "or", etc....)
3. Une présentation agréable est attendue : laisser une marge à gauche, aérer votre texte, présentez proprement et **encadrez vos résultats**.



Exercice 1 : Dérivabilité en un point

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f .
2. Étudier la dérivabilité de f en 1, et interpréter graphiquement le résultat.

1. $f(x)$ existe si et seulement si $1+x \neq 0$ et $\frac{1-x}{1+x} \geq 0$.

On dresse un tableau de signe :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1-x$	+	+	0	-
$1+x$	-	0	+	+
$\frac{1-x}{1+x}$	-	+	0	-

On en déduit que

$$\mathcal{D}_f =]-1; 1].$$

2. La racine carrée n'est pas dérivable en 0, et $\frac{1-x}{1+x}$ s'annule en 1 : les théorèmes généraux (produit, composition, etc.) ne s'appliquent pas, on revient donc au taux d'accroissement..
1 appartient à $\mathcal{D}_f$, dont il est la borne droite : seul le taux d'accroissement à gauche a un sens.

Pour $x \in]-1; 1[$, $f(1) = 0$, et $1-x > 0$, $1+x > 0$, donc $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$:

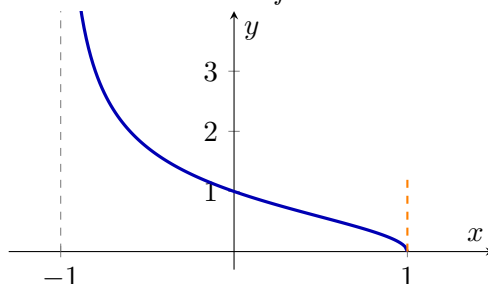
$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} \times \frac{1}{x-1} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}} \quad (\text{car } x-1 = -(\sqrt{1-x})^2) \end{aligned}$$

Quand $x \rightarrow 1^-$, $\sqrt{1+x} \rightarrow \sqrt{2}$ et $\sqrt{1-x} \rightarrow 0^+$: le taux tend vers $-\infty$.

La fonction f n'est pas dérivable en 1.

Néanmoins, la courbe de g admet au point $(1;0)$ une demi-tangente verticale

Ce n'était pas demandé, mais voici la courbe de f :



Erreur classique : Faire entrer $x - 1$ sous la racine en écrivant $x - 1 = \sqrt{(x - 1)^2}$: c'est faux pour $x < 1$! En effet, comme $x - 1$ serait alors négatif, on a $x - 1 = -\sqrt{(x - 1)^2}$. Le signe oublié donne $+\infty$ au lieu de $-\infty$.



Exercice 2 : Petites études de fonctions

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x + 1}.$$

- a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f , justifier que f est dérivable sur $]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]2; +\infty[$, et calculer $f'(x)$ sur cet ensemble.
b) Étudier la dérivabilité de f en 2, et interpréter graphiquement le résultat.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{x}{x^4 + 1}.$$

- a) Étudier la parité de g .
b) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et dresser son tableau de variations, limites comprises.
c) Montrer que g est bornée sur $\mathbb{R}$, et préciser $g(\mathbb{R})$.
d) La fonction g est-elle injective sur $\mathbb{R}$? On justifiera soigneusement la réponse.

1. a) *Ensemble de définition.* $f(x)$ existe si et seulement si $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ et $x + 1 \neq 0$. Le trinôme $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ a pour racines 1 et 2 et un coefficient dominant positif : il est positif ou nul en dehors de $]1; 2[$.

$$\mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]2; +\infty[.$$

Dérivabilité. Posons $w(x) = x^2 - 3x + 2$ et $I =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]2; +\infty[$. Sur I , $w(x) > 0$; la racine carrée étant dérivable sur $]0; +\infty[$, $u = \sqrt{w}$ est dérivable sur I par composition. Le dénominateur $v(x) = x + 1$ est dérivable et ne s'annule pas sur I .

La fonction $f = \frac{u}{v}$ est dérivable sur I , comme quotient.

Dérivée. On applique $(\sqrt{w})' = \frac{w'}{2\sqrt{w}}$ et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, avec

$$u'(x) = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 2}}, \quad v'(x) = 1.$$

Pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} u'(x)v(x) - u(x)v'(x) &= \frac{(2x - 3)(x + 1)}{2\sqrt{x^2 - 3x + 2}} - \sqrt{x^2 - 3x + 2} \\ &= \frac{(2x - 3)(x + 1) - 2(x^2 - 3x + 2)}{2\sqrt{x^2 - 3x + 2}} \\ &= \frac{5x - 7}{2\sqrt{x^2 - 3x + 2}} \end{aligned}$$

et il reste à diviser par $v(x)^2 = (x + 1)^2$.

$$\text{Pour tout } x \in I, f'(x) = \frac{5x - 7}{2(x + 1)^2\sqrt{x^2 - 3x + 2}}.$$

- b) Le point 2 appartient à $\mathcal{D}_f$, mais $]1; 2[$ n'y est pas : seul le taux d'accroissement à droite a un sens. La formule de f' ne s'applique pas en 2, où w s'annule. Pour $x > 2$, $f(2) = 0$, et les facteurs $x - 1$ et $x - 2$ sont positifs :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \frac{\sqrt{x - 1}\sqrt{x - 2}}{(x + 1)(x - 2)} \\ &= \frac{\sqrt{x - 1}}{(x + 1)\sqrt{x - 2}} \quad \text{car } x - 2 = (\sqrt{x - 2})^2 \end{aligned}$$

Quand $x \rightarrow 2^+$, $\sqrt{x - 1} \rightarrow 1$, $x + 1 \rightarrow 3$ et $\sqrt{x - 2} \rightarrow 0^+$: le taux tend vers $+\infty$.

La fonction f n'est pas dérivable en 2

La courbe de f admet une demi-tangente verticale, au point $(2; 0)$.

Erreur classique. Remplacer x par 2 dans l'expression de f' : elle n'est établie que là où $w(x) > 0$, et son dénominateur s'annule en 2.

2. a) $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(-x) = \frac{-x}{(-x)^4 + 1} = -\frac{x}{x^4 + 1} = -g(x).$$

La fonction g est impaire.

- b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^4 + 1 \geq 1 > 0$: g est le quotient de deux fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1 \times (x^4 + 1) - x \times 4x^3}{(x^4 + 1)^2} \\ &= \frac{1 - 3x^4}{(x^4 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Le signe de $g'(x)$ est celui de $1 - 3x^4$. Posons $\alpha = 3^{-1/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$, de sorte que $\alpha^4 = \frac{1}{3}$. La fonction $t \mapsto t^4$ étant strictement croissante sur $[0; +\infty[$,

$$1 - 3x^4 > 0 \iff x^4 < \frac{1}{3} \iff |x| < \alpha.$$

Puis

$$g(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha^4 + 1} = \frac{\alpha}{\frac{4}{3}} = \frac{3\alpha}{4} = \frac{3^{3/4}}{4},$$

que l'on note M ; par imparité, $g(-\alpha) = -M$. Enfin, pour $x \neq 0$, $g(x) = \frac{1}{x^3} \times \frac{1}{1 + 1/x^4}$, qui tend vers 0 en $-\infty$ et en $+\infty$.

x	$-\infty$	$-\alpha$	α	$+\infty$		
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
g	0			M		0
			$-M$			

- c) D'après le tableau, g est à valeurs dans $[-M; 0[$ sur $]-\infty; -\alpha]$, dans $[-M; M]$ sur $[-\alpha; \alpha]$, et dans $]0; M]$ sur $[\alpha; +\infty[$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-M \leq g(x) \leq M$.

Ainsi, $g(\mathbb{R}) \subset [-M; M]$ et La fonction g est bornée

De plus, g est continue sur le segment $[-\alpha; \alpha]$ et y prend les valeurs $-M$ et M : par le théorème des valeurs intermédiaires, toute valeur de $[-M; M]$ est atteinte, d'où $[-M; M] \subset g(\mathbb{R})$, ce qui montre donc que :

$$g(\mathbb{R}) = \left[-\frac{3^{3/4}}{4}; \frac{3^{3/4}}{4} \right].$$

- d) On a $g(1) = \frac{1}{2}$; montrons que $\frac{1}{2}$ a un autre antécédent. La fonction $t \mapsto t^4$ étant strictement croissante sur $[0; +\infty[$,

$$M > \frac{1}{2} \iff 3^{3/4} > 2 \iff 3^3 > 2^4 \iff 27 > 16,$$

ce qui est vrai. La fonction g est continue sur $[0; \alpha]$, avec $g(0) = 0 < \frac{1}{2} < M = g(\alpha)$: par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]0; \alpha[$ tel que $g(c) = \frac{1}{2}$. Or $3^{1/4} > 1$, donc $\alpha < 1$, et $c < 1$.

Les réels c et 1 sont distincts et ont même image : g n'est pas injective sur $\mathbb{R}$.



Exercice 3 : Pairs et impairs

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n k \quad \text{et} \quad D_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k k.$$

1. Donner la valeur de S_n , puis montrer par récurrence que

$$D_n = \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4}.$$

2. On pose

$$A_n = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} k \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} k.$$

- a) Calculer $A_n + B_n$ et $A_n - B_n$.
b) En déduire A_n et B_n , puis simplifier leurs expressions selon la parité de n .

1. *Valeur de S_n .* C'est la somme des entiers de 1 à n :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Formule de D_n . Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{P}(n) : \ll D_n = \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4} \gg.$$

Initialisation. $D_1 = (-1)^1 \times 1 = -1$, et $\frac{(-1)^1 \times 3 - 1}{4} = \frac{-4}{4} = -1$: $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$. On écrit $(-1)^n = -(-1)^{n+1}$, puis on réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= D_n + (-1)^{n+1}(n+1) \\ &= \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4} + (-1)^{n+1}(n+1) \quad \leftarrow \mathcal{P}(n) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(-(2n+1) + 4(n+1)) - 1}{4} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(2n+3) - 1}{4}. \end{aligned}$$

Or $2n+3 = 2(n+1) + 1$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, D_n = \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4}.$$

2. a) Chaque entier k de $\llbracket 1; n \rrbracket$ est pair ou impair, et pas les deux à la fois : les termes de A_n et ceux de B_n forment donc exactement ceux de S_n .

$$A_n + B_n = S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dans D_n , $(-1)^k k$ vaut k si k est pair, et $-k$ si k est impair :

$$D_n = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} k - \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} k.$$

. Ainsi :

$$A_n - B_n = D_n = \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4}.$$

- b) En ajoutant, puis en retranchant les deux égalités de la question 2.a :

$$A_n = \frac{S_n + D_n}{2}, \quad B_n = \frac{S_n - D_n}{2}.$$

Avec $S_n = \frac{2n(n+1)}{4}$, on réduit au même dénominateur :

$$A_n = \frac{2n(n+1) + (-1)^n(2n+1) - 1}{8},$$

$$B_n = \frac{2n(n+1) - (-1)^n(2n+1) + 1}{8}.$$

Si n est pair alors $(-1)^n = 1$ et :

$$A_n = \frac{2n^2 + 2n + 2n + 1 - 1}{8} = \frac{2n(n+2)}{8} = \frac{n(n+2)}{4},$$

$$B_n = \frac{2n^2 + 2n - 2n - 1 + 1}{8} = \frac{2n^2}{8} = \left(\frac{n}{2}\right)^2.$$

Si n est impair, alors $(-1)^n = -1$ et :

$$A_n = \frac{2n^2 + 2n - 2n - 1 - 1}{8} = \frac{2(n^2 - 1)}{8} = \frac{(n-1)(n+1)}{4},$$

$$B_n = \frac{2n^2 + 2n + 2n + 2}{8} = \frac{2(n+1)^2}{8} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$



Exercice 4 : Étude de fonction et bijection

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|.$$

1. **Étude de f .**

- Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f .
- Montrer que f est impaire.
- Soit $x \in \mathcal{D}_f$, avec $x \neq 0$. Justifier que $\frac{1}{x} \in \mathcal{D}_f$, et comparer $f\left(\frac{1}{x}\right)$ et $f(x)$.
- Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.
- Dresser le tableau de variations de f , en précisant les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
- Tracer l'allure de la courbe représentative de f , en faisant apparaître ses asymptotes et les propriétés établies dans cette partie.

2. **Bijektivité.** On note F la restriction de f à l'intervalle $] -1; 1[$.

- Démontrer que F est une bijection de $] -1; 1[$ sur $\mathbb{R}$.
- Dresser le tableau de variations de F^{-1} , limites comprises.
Indication : il est inutile de dériver.
- Tracer l'allure de la courbe représentative de F^{-1} .

3. **Expression explicite de la réciproque.**

- Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $F(x) = y$, d'inconnue $x \in] -1; 1[$.
- En déduire l'expression de $F^{-1}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
- Déterminer $(F^{-1} \circ f)(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, en distinguant selon que x appartient ou non à $] -1; 1[$.

On pourra utiliser la comparaison de $f\left(\frac{1}{x}\right)$ et $f(x)$ établie dans la première partie.

- $f(x)$ existe si et seulement si le quotient $\frac{x-1}{x+1}$ est défini, soit $x \neq -1$, et si sa valeur absolue est strictement positive, soit $x \neq 1$.

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}.$$

b) $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0. Pour $x \in \mathcal{D}_f$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{-x-1}{-x+1} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \leftarrow \ln \frac{1}{a} = -\ln a \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

La fonction f est impaire.

- Soit $x \in \mathcal{D}_f$, avec $x \neq 0$. Alors $\frac{1}{x}$ est défini, et $\frac{1}{x} \neq \pm 1$ puisque $x \neq \pm 1$: $\frac{1}{x} \in \mathcal{D}_f$. En multipliant numérateur et dénominateur par $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \leftarrow |-a| = |a| \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathcal{D}_f \setminus \{0\}$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$.

- d) Posons $u(x) = \frac{x-1}{x+1}$: u est dérivable sur $\mathcal{D}_f$, comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas, et

$$u'(x) = \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

On a vu en TD (exo 8 feuille TD-AN01) que $\ln(|u|)' = \frac{u'}{u}$ sans qu'il soit nécessaire de distinguer le signe de u . Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{x-1} \\ &= \frac{1}{(x+1)(x-1)}. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

- e) *Signe de f' .* $f'(x) > 0 \iff x^2 > 1 \iff |x| > 1$.

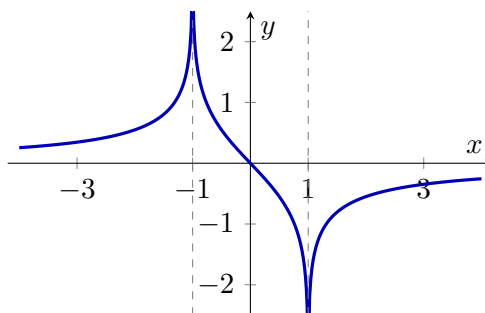
Limites. En $+\infty$ et en $-\infty$, $u(x) = \frac{1-1/x}{1+1/x} \rightarrow 1$; par continuité de $\ln$ en 1, $f(x) \rightarrow \frac{1}{2} \ln 1 = 0$. En 1, à gauche comme à droite, $u(x) \rightarrow \frac{0}{2} = 0$, donc $|u(x)| \rightarrow 0^+$ et $f(x) \rightarrow -\infty$. En -1, par imparité, $f(x) \rightarrow +\infty$ de part et d'autre. Enfin $f(0) = \frac{1}{2} \ln 1 = 0$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	+
f	0 ↗ $+\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$-\infty$ ↗ 0	

La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$, strictement décroissante sur $]-1; 1[$.

Erreur classique. Conclure que f est croissante sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$: cet ensemble n'est pas un intervalle, et $f(-2) = \frac{1}{2} \ln 3 > 0 > f(2)$ alors que $-2 < 2$.

- f) Les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$ sont asymptotes verticales, l'axe des abscisses est asymptote en $-\infty$ et en $+\infty$, et la courbe est symétrique par rapport à l'origine, par laquelle elle passe.



2. a) Sur $]-1; 1[$, $F'(x) = \frac{1}{x^2 - 1} < 0$: F est continue et strictement décroissante sur cet intervalle. Par le théorème de la bijection monotone, F est une bijection de $]-1; 1[$ dans $F(]-1; 1[)$.

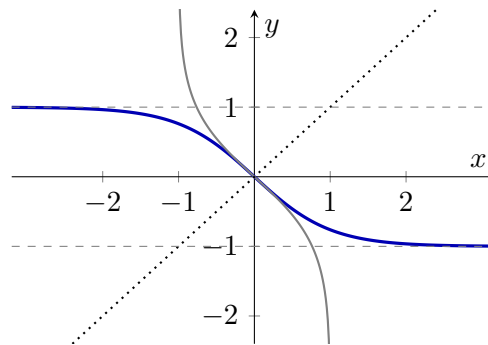
Reste à montrer que cette image est $\mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Les limites de F , $+\infty$ en -1^+ et $-\infty$ en 1^- , donnent $a < b$ dans $] -1; 1[$ tels que $F(a) > y > F(b)$; F étant continue sur $[a; b]$, le théorème des valeurs intermédiaires fournit $x \in [a; b]$ tel que $F(x) = y$.

F est une bijection de $] -1; 1[$ dans $\mathbb{R}$.

- b) Par le théorème de la bijection monotone, F^{-1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, comme F . Ses limites se lisent sur celles de F , en échangeant les rôles des variables : F tend vers $+\infty$ en -1^+ et vers $-\infty$ en 1^- , donc F^{-1} tend vers -1 en $+\infty$ et vers 1 en $-\infty$. Enfin $F(0) = 0$ donne $F^{-1}(0) = 0$.

y	$-\infty$	0	$+\infty$
F^{-1}	1	0	-1

- c) La courbe de F^{-1} est la symétrique de celle de F par rapport à la droite d'équation $y = x$: elle passe par l'origine, et admet les asymptotes horizontales $y = 1$ en $-\infty$ et $y = -1$ en $+\infty$. Ci-dessous, en trait épais la courbe de F^{-1} , en gris celle de F , en pointillés la droite $y = x$.



3. a) $y \in \mathbb{R}$ et $x \in] -1; 1[$. Sur cet intervalle, $\frac{x-1}{x+1} < 0$, donc $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| = \frac{1-x}{1+x}$:

$$\begin{aligned}
 F(x) = y &\iff \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = 2y && , \times 2 \\
 &\iff \frac{1-x}{1+x} = e^{2y} && , \text{exp et ln réciproques} \\
 &\iff 1-x = e^{2y}(1+x) && , \times (1+x), 1+x > 0 \\
 &\iff 1-e^{2y} = x(1+e^{2y}) && , +x - e^{2y} \\
 &\iff x = \frac{1-e^{2y}}{1+e^{2y}} && , \div (1+e^{2y})
 \end{aligned}$$

Cette valeur appartient bien à $] -1; 1[$: $e^{2y} > 0$ donne $-(1+e^{2y}) < 1-e^{2y} < 1+e^{2y}$.

L'équation $F(x) = y$ a une unique solution dans $] -1; 1[$, $x = \frac{1-e^{2y}}{1+e^{2y}}$.

- b) Par définition, $F^{-1}(y)$ est cette solution.

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $F^{-1}(y) = \frac{1-e^{2y}}{1+e^{2y}}$.

- c) Soit $x \in \mathcal{D}_f$.

Si $x \in] -1; 1[$, $f(x) = F(x)$, donc $(F^{-1} \circ f)(x) = F^{-1}(F(x)) = x$.

Si $|x| > 1$, alors $x \neq 0$ et $\left| \frac{1}{x} \right| < 1$: $\frac{1}{x} \in] -1; 1[$. D'après la question 1.c, $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) =$

$F\left(\frac{1}{x}\right)$, donc

$$(F^{-1} \circ f)(x) = F^{-1}\left(F\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x}.$$

$$(F^{-1} \circ f)(x) = x \text{ si } x \in] -1; 1[, \text{ et } \frac{1}{x} \text{ si } |x| > 1.$$

Erreur classique. Écrire $F^{-1} \circ f = \text{id}$ sur tout $\mathcal{D}_f : F^{-1}$ est la réciproque de la restriction F , pas de f , qui n'est d'ailleurs pas injective ($f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right)$).



Exercice 5 : Valeur absolue et bijection

Soient a et b deux réels et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = ax + b + |x|.$$

1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$. En déduire des conditions nécessaires et suffisantes sur a et b pour que f soit strictement monotone.
2. À quelle(s) condition(s) sur a et b la fonction f est-elle bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
3. On suppose désormais $a > 1$, et l'on cherche l'expression de $f^{-1}(y)$ pour $y \in \mathbb{R}$.
 - a) Calculer $f(0)$. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ si et seulement si $f(x) \geq b$.
 - b) Soit $y \geq b$. Résoudre l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x \in [0; +\infty[$.
 - c) Soit $y < b$. Résoudre l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x \in]-\infty; 0]$.
 - d) En déduire l'expression de $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
 - e) Adapter cette recherche au cas $a < -1$, et donner l'expression de f^{-1} .

1. Si $x > 0$, on a $f(x) = ax + b + x$ d'où $f'(x) = a + 1$ et si $x < 0$, on obtient $f'(x) = a - 1$.

Pour que f soit strictement monotone sur $\mathbb{R}$, il suffit donc que $a + 1$ et $a - 1$ soient strictement positifs, c'est à dire dire $a > 1$, ou bien $a + 1$ et $a - 1$ strictement négatifs, c'est à dire $a < -1$. Il n'y a pas de condition sur b .

Ainsi f est strictement monotone si $|a| > 1$ (condition suffisante).

De plus, si $|a| \leq 1$, alors $-1 \leq a \leq 1$ donc $a + 1 \geq 0$ et $a - 1 \leq 0$: la fonction change donc de monotonie (ou est constante) selon les intervalles.

Elle n'est donc pas strictement croissante.

La condition $|a| > 1$ est donc nécessaire et

$$f \text{ est strictement monotone si et seulement si } |a| > 1$$

2. Comme f est continue, si f n'est pas strictement monotone, on se retrouve dans une situation similaire à l'exo 2, question 2d : le théorème des valeurs intermédiaire entraîne la non injectivité. Ainsi, pour que f soit bijective, il faut déjà que f soit strictement monotone, c'est à dire $|a| > 1$. Il s'agit maintenant de déterminer $f(\mathbb{R})$. Comme f est strictement monotone et continue, il suffit de regarder les limites en $+\infty$ et $-\infty$.

Comme $|a| > 1$, on a donc deux cas à étudier.

Si $a > 1$:

En $+\infty$, donc pour $x > 0$, on a $f(x) = (a + 1)x + b$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ car $a + 1 > 0$.

En $-\infty$, donc pour $x < 0$, on a $f(x) = (a - 1)x + b$ et comme $a - 1 > 0$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Ainsi, si $a > 1$, la continuité de f et le TVI garantissent que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et f est donc surjective. Comme elle est strictement monotone, elle est aussi injective, donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

De même, si $a < -1$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, donc à nouveau $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Dans les deux cas, f est bijective si et seulement si $|a| > 1$.

3. a) $f(0) = a \times 0 + b + |0| = b$.

Pour $a > 1$, les deux pentes $a + 1$ et $a - 1$ sont strictement positives : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (question 1). Elle conserve donc l'ordre dans les deux sens, et pour $x \in \mathbb{R}$:

$$x \geq 0 \iff f(x) \geq f(0) \iff f(x) \geq b.$$

- b) $y \geq b$ et $x \in [0; +\infty[$, où $|x| = x$.

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff (a + 1)x + b = y && , |x| = x \\ &\iff x = \frac{y - b}{a + 1} && , -b \text{ puis } \div (a + 1) \end{aligned}$$

Or $y - b \geq 0$ et $a + 1 > 0$: ce réel appartient bien à $[0; +\infty[$.

$$\text{L'équation a une unique solution, } x = \frac{y - b}{a + 1}.$$

c) $y < b$ et $x \in]-\infty; 0[$, où $|x| = -x$.

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff (a-1)x + b = y && , |x| = -x \\ &\iff x = \frac{y-b}{a-1} && , -b \text{ puis } \div (a-1) \end{aligned}$$

Or $y - b < 0$ et $a - 1 > 0$: ce réel appartient bien à $]-\infty; 0[$.

L'équation a une unique solution, $x = \frac{y-b}{a-1}$.

d) Soit $y \in \mathbb{R}$. D'après la question 2, f est bijective, et $x = f^{-1}(y)$ est l'unique réel tel que $f(x) = y$.

Si $y \geq b$, la question 3.a donne $x \geq 0$: x est la solution trouvée en 3.b. Si $y < b$, elle donne $x < 0$: x est celle de 3.c.

Pour $a > 1$:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y-b}{a+1} & \text{si } y \geq b, \\ \frac{y-b}{a-1} & \text{si } y < b. \end{cases}$$

e) Pour $a < -1$, les deux pentes sont strictement négatives : f est strictement décroissante, et l'équivalence de 3.a s'inverse :

$$x \geq 0 \iff f(x) \leq b.$$

Les chaînes de 3.b et 3.c restent les mêmes, sur les demi-droites que désigne cette équivalence. Pour $y \leq b$, la solution cherchée dans $[0; +\infty[$ est $\frac{y-b}{a+1}$, qui y appartient bien ($y - b \leq 0$ et $a + 1 < 0$). Pour $y > b$, celle cherchée dans $]-\infty; 0[$ est $\frac{y-b}{a-1}$, strictement négative ($y - b > 0$ et $a - 1 < 0$).

Pour $a < -1$:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y-b}{a+1} & \text{si } y \leq b, \\ \frac{y-b}{a-1} & \text{si } y > b. \end{cases}$$

Dans les deux cas, f^{-1} change d'expression en $y = b = f(0)$: l'image du point où $|x|$ change d'expression.

Erreur classique. En 3.d, recopier les deux formules sans dire pourquoi la position de y par rapport à b choisit la bonne : c'est l'équivalence de 3.a qui le fait.



Exercice 6 : hors barème. Uniquement si vous avez fait TOUT le reste

Soient E et F deux ensembles et soit $\varphi : E \rightarrow F$.

1. Montrez que φ est injective si et seulement si pour tout $A \subset E$, $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = A$.
2. Montrez que φ est surjective si et seulement si pour tout $B \subset F$, $\varphi(\varphi^{-1}(B)) = B$.

1. **sens direct :** Supposons φ injective, et soit $A \subset E$. Montrons que $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = A$.

Si $x \in A$, alors $\varphi(x) \in \varphi(A)$ donc x est un antécédent d'un élément de $\varphi(A)$, c'est à dire $x \in \varphi^{-1}(\varphi(A))$.

Ainsi $A \subset \varphi^{-1}(\varphi(A))$.

Supposons maintenant qu'on n'ait pas égalité. Soit donc $y \in \varphi^{-1}(\varphi(A))$ tel que $y \notin A$. Alors $\varphi(y) \in \varphi(A)$, donc il existe $x \in A$ tel que $\varphi(x) = \varphi(y)$.

Ainsi, $\varphi(x) = \varphi(y)$ avec $x \neq y$ (puisque $x \in A$ mais pas y).

sens indirect : Supposons que pour tout A , $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = A$ et montrons que φ est injective. Soient $a_1, a_2 \in E$ tel que $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$. Posons $A_1 = \{a_1\}$ et $A_2 = \{a_2\}$. Alors $\varphi^{-1}(\varphi(A_1)) = A_1$ et $\varphi^{-1}(\varphi(A_2)) = A_2$.

Mais $\varphi(A_1) = \{\varphi(a_1)\} = \{\varphi(a_2)\} = \varphi(A_2)$.

Et donc $A_1 = \varphi^{-1}(\varphi(A_1)) = \varphi^{-1}(\varphi(A_2)) = A_2$

Finalement $A_1 = A_2$ et donc $a_1 = a_2$: φ est bien injective.

2. **Sens direct :** Supposons φ surjective et soit $B \subset F$.

Soit $y \in B$. Comme φ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $x = \varphi(y)$. x est donc un antécédent de y , qui est un élément de B , par φ . Donc $x \in \varphi^{-1}(B)$.

Ainsi y est l'image d'un élément de $\varphi^{-1}(B)$. Donc $y \in \varphi(\varphi^{-1}(B))$.

Ainsi, on a montré $B \subset \varphi(\varphi^{-1}(B))$.

D'autre part, si $y \in \varphi(\varphi^{-1}(B))$, alors y est l'image d'un élément de $\varphi^{-1}(B)$, c'est à dire l'image d'un élément qui est un antécédent d'un élément de B . Donc y est dans B et on a la seconde inclusion (qui est toujours vraie : la surjectivité ne sert pas ici)

$\varphi(\varphi^{-1}(B)) \subset B$.

On a bien montré l'égalité des ensembles si φ est surjective.

Sens réciproque : Supposons que pour tout $B \subset F$, $\varphi(\varphi^{-1}(B)) = B$.

Si on écrit l'égalité avec $B = F$, on obtient donc :

$$\varphi(\varphi^{-1}(F)) = F$$

Or $\varphi^{-1}(F) \subset E$, donc $\varphi(\varphi^{-1}(F)) \subset \varphi(E)$

On en déduit que $F \subset \varphi(E)$. Comme on a toujours $\varphi(E) \subset F$, on en déduit $F = \varphi(E)$, donc φ est surjective.