

Corrigé du DS 2

Exercice 1 : CCINP 2026 maths 2 exo 1

Q1. La matrice J est non nulle et toutes ses colonnes sont colinéaires, donc :

$$\text{rg}(J) = 1.$$

Donc : J n'est pas inversible, donc 0 est une valeur propre de J et, d'après le théorème du rang :

$$\dim(\text{Ker}(J - 0I_3)) + \text{rg}(J - 0I_3) = 3.$$

Donc : la dimension du son sous espace propre de J associé à la valeur propre 0 est 2.

De plus $J \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc 3 est une valeur propre de J . Donc la somme des dimensions des sous espaces propres de J est au moins 3. Donc

$$J \text{ est diagonalisable et semblable à la matrice } \text{diag}(0, 0, 3).$$

Q2. D'après la question précédente, il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}JP = \text{diag}(0, 0, 3)$. Donc :

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}(bI_3 + aJ)P \\ &= b \cdot P^{-1}I_3P + a \cdot P^{-1}JP \\ &= b \cdot I_3 + a \cdot \text{diag}(0, 0, 3) \\ &= \text{diag}(b, b, 3a + b). \end{aligned}$$

Donc :

$$A \text{ est semblable à la matrice } \text{diag}(b, b, 3a + b).$$

Q3. On sait que la matrice A est diagonalisable, donc son polynôme minimal est simplement scindé. De plus, les racines du polynôme minimal de A sont les valeurs propres de A , c'est à dire b et $3a + b$ d'après la question précédente. Donc :

$$\pi_A = (X - b)(X - 3a - b).$$

Q4. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après le théorème de division euclidienne, il existe $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que $X^n = \pi_A Q + R$ et $\deg(R) < \deg(\pi_A) = 2$.

Donc, il existe $u, v \in \mathbb{R}$ tels que $R = uX + v$. Donc $b^n = \pi_A(b)Q(b) + R(b)$, donc : $ub + v = b^n$

et $\lambda^n = u \times (3a + b) + v$; or $a \neq 0$,

Donc : $u = \frac{\lambda^n - b^n}{3a}$ et $v = b^n - b \times \frac{\lambda^n - b^n}{3a} = \frac{\lambda b^n - b \lambda^n}{3a}$. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \frac{\lambda^n - b^n}{3a} A + \frac{\lambda b^n - b \lambda^n}{3a} I_3.$$

b) On remarque que : $J^2 = 3J$, donc par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, J^k = 3^{k-1} J.$$

Attention au cas $k = 0$ lorsqu'on utilisera ce résultat ci-dessous.

Les matrices J et I_3 commutent donc, d'après la formule du binôme de Newton, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} A^n &= (aJ + bI_3)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (aJ)^k (bI_3)^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} b^n I_3 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k 3^{k-1} b^{n-k} J \\ &= b^n I_3 + \frac{1}{3} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (3a)^k b^{n-k} - \binom{n}{0} b^n \right] J \\ &= b^n I_3 + \frac{(3a + b)^n - b^n}{3} J \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = b^n I_3 + \frac{(3a + b)^n - b^n}{3} J.$$

On peut vérifier la cohérence des deux résultats en remplaçant A par $aJ + bI_3$ dans la formule précédente.

Exercice 2 : CCINP 2022 maths 2 exo 1

Q5. $V(x_1, x_2) = x_2 - x_1$.

S'il existe $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tels que $i \neq j$ et $x_i = x_j$ alors $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, car il a deux colonnes identiques et le produit est également nul car il contient un terme $(x_i - x_j) = 0$. La formule est donc vraie si les nombres $x_1, \dots, x_n$ ne sont pas deux à deux distincts.

Dans la suite, $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont n nombres complexes deux à deux distincts.

Q6. Soit $P : t \mapsto V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t)$.

- Le développement de $V(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ par rapport à la dernière colonne donne

$$P(t) = (-1)^{n+1} \Delta_{1,n} + (-1)^{n+2} \Delta_{2,n} t + (-1)^{n+3} \Delta_{3,n} t^2 + \dots + (-1)^{n+n} \Delta_{n,n} t^{n-1}$$

avec $\Delta_{i,n}$ le déterminant obtenu en éliminant la ligne d'indice i et la colonne d'indice n de $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, les $\Delta_{i,n}$ ne dépendent pas de t . Donc P est une fonction polynomiale de degré au plus $n-1$.

Le coefficient de t^{n-1} est $\Delta_{n,n} = V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$

- On a $P(x_i) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, car c'est un déterminant avec deux colonnes identiques, donc le polynôme $\prod_{1 \leq i \leq n-1} (X - x_i)$ divise P , si P n'est pas le polynôme

nul il est de degré $n-1$, donc $P(X) = C \prod_{1 \leq i \leq n-1} (X - x_i)$, avec $C \in \mathbb{C}$.

C est le coefficient du plus haut degré de P donc $C = V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$.

Ce qui donne pour $t = x_n$:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (x_n - x_i).$$

- Montrons par récurrence que : $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

La relation est vraie pour $n = 2$. On la suppose pour n .

Soit $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ sont $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts, on a

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) &= V(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{n+1} - x_i) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{n+1} - x_i) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i) \end{aligned}$$

Conclusion : par principe de récurrence :

$$\text{pour tout } n \geq 2, V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Q7. Soit $A = (i^j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, on a

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & \dots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n^2 & n^3 & \dots & n^n \end{vmatrix}.$$

On factorise chaque ligne i , donc

$$\begin{aligned} \det A &= n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= n! V(1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

car le déterminant d'une matrice est égale au déterminant de sa transposée.

Donc :

$$\boxed{\det A = n! V(1, 2, \dots, n).}$$

Q8. On prend $a_k = e^{\frac{ik\pi}{n}}$, $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Les nombres complexes $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts et tous non nuls, et

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = \sum_{k=1}^n e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0.$$

Les nombres complexes $x_1, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts, donc $V(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, donc :

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \text{GL}_n(\mathbb{C}); \text{ or } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0 \\ \text{donc } MX &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n x_k^n \end{pmatrix} \neq 0. \end{aligned}$$

ainsi

$$\text{l'une au moins des sommes } \sum_{k=1}^n x_k, \sum_{k=1}^n x_k^2, \dots, \sum_{k=1}^n x_k^n \text{ est non nulle.}$$

Problème : Théorème de décomposition de Dunford : CCINP 2021 maths 2

Partie I - Quelques exemples

Q9. Soit $A \in M_n(K)$.

- Si A est diagonalisable, $(D, N) = (A, 0)$ est la décomposition de Dunford de A .
En effet, $D = A$ est diagonalisable, $N = 0$ est nilpotente, $DN = ND = 0$ et $A = A + 0 = D + N$.
- Si A est nilpotente, $(D, N) = (0, A)$ est la décomposition de Dunford de A .
En effet, $D = 0$ est diagonalisable, $N = A$ est nilpotente, $DN = ND = 0$ et $A = 0 + A = D + N$.
- Une matrice trigonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$ a un polynôme caractéristique scindé, donc :
Une matrice trigonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$ vérifie l'hypothèse du théorème donc admet une décomposition de Dunford.
- Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
 D' est diagonalisable (car diagonale), N' est nilpotente (car $(N')^2 = 0$), $A = D' + N'$, cependant D' et N' ne commutent pas :

$$D'N' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq N'D' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Non, } \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \text{ n'est pas la décomposition de Dunford de } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Q10. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Son polynôme caractéristique $\chi_A(X) = X^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Supposons par l'absurde que A admet une décomposition de Dunford (D, N) . D'après le théorème, on a de plus $\chi_A = \chi_D$.

Puisque D est diagonalisable, D est semblable à une matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Son polynôme caractéristique vaut $\chi_A(X) = \chi_D(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$. Donc χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, ce qui est absurde.

$$\text{La matrice } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \text{ n'admet pas de décomposition de Dunford dans } M_2(\mathbb{R}).$$

Q11. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculons son polynôme caractéristique,

en développant par rapport à la deuxième colonne :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det(XI_3 - A) \\ &= \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -8 \\ -3 & X+1 & -6 \\ 2 & 0 & X+5 \end{vmatrix} = (X+1) \begin{vmatrix} X-3 & -8 \\ 2 & X+5 \end{vmatrix} \\ &= (X+1)(X^2 + 2X + 1) = (X+1)^3. \end{aligned}$$

Ainsi $\chi_A(X) = (X+1)^3$.

χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de l'énoncé, A admet une décomposition de Dunford. Soit (D, N) le couple de sa décomposition de Dunford.

D est diagonalisable et $\chi_D(X) = \chi_A(X) = (X+1)^3$ donc $\text{Sp}(D) = \{-1\}$. D est semblable à la matrice diagonale avec des -1 sur sa diagonale, donc D est semblable à $-I_3$.

Ainsi $\exists P \in GL_3(\mathbb{R})$, $P^{-1}DP = -I_3$, d'où $D = P(-I_3)P^{-1} = -I_3$. On a $D = -I_3$, d'où

$$N = A - D = A + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\left(-I_3, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \right) \text{ est la décomposition de Dunford de } A.$$

Q12.

Q13. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$.

Posons $P(X) = X(X-1)$. $P(A^2) = A^2(A^2 - I_n) = A^2(A - I_n)(A + I_n) = 0(A + I_n) = 0$.

Donc le polynôme $X(X-1)$ annule la matrice A^2 .

Le polynôme $X(X-1)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$ et annule A^2 , donc

A^2 est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$.

Posons $D = A^2$ et $N = A - A^2$. Vérifions que (D, N) est la décomposition de Dunford de A :

- $A = D + N$ par construction.
- $D = A^2$ est diagonalisable.
- $N^2 = (A - A^2)^2 = A^2(I_n - A)^2 = A^2(A - I_n)(A - I_n) = 0$ car $A^2(A - I_n) = 0$.
 $N^2 = 0$ donc N est nilpotente.
- D et N sont des polynômes en A donc commutent : $DN = ND = A^3 - A^4$.

Donc

$$(A^2, A - A^2) \text{ est la décomposition de Dunford de la matrice } A.$$

Partie II - Un exemple par deux méthodes

Q14. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculons son polynôme caractéristique.

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det(XI_3 - A) \\ &= \begin{vmatrix} X-3 & 1 & -1 \\ -2 & X & -1 \\ -1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} & C_2 \leftarrow C_2 + C_3 \\ &= \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -1 \\ -2 & X-1 & -1 \\ -1 & X-1 & X-2 \end{vmatrix} \\ &= (X-1) \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} & (\text{linéarité}) \\ &= (X-1)((X-3)(X-1)+1) & (L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \text{ puis dév 2e colonne}) \\ &= (X-1)(X^2 - 4X + 4) \\ &= (X-1)(X-2)^2. \end{aligned}$$

Ainsi $\chi_A(X) = (X-1)(X-2)^2$. Donc $\text{Sp}(A) = \{1, 2\}$. On a $\dim(\text{Ker}(A - I_3)) = 1$. Calculons $\dim(\text{Ker}(A - 2I_3))$.

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $(A - 3I_3)$ est de rang 2. Par le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(A - 3I_3)) = 1 < 2$. La dimension du sous-espace propre associé à 2 est strictement inférieure à la multiplicité de 2 en tant que valeur propre dans χ_A , donc

A n'est pas diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A . Par le théorème de Cayley-Hamilton, χ_u annule u , or $\chi_u(X) = (X-1)(X-2)^2$. Les polynômes $(X-1)$ et $(X-2)^2$ sont premiers entre eux.

Par le lemme de décomposition des noyaux,

$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(\chi_u(u)) = \text{Ker}(u - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(u - 2\text{Id})^2$.

Q15. Calculons les noyaux des endomorphismes demandés.

$$\begin{aligned} A - I_3 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, & \text{Ker}(A - I_3) &= \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \\ A - 2I_3 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & \text{Ker}(A - 2I_3) &= \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \\ (A - 2I_3)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \text{Ker}(A - 2I_3)^2 &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Posons alors

$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Alors

$\text{Ker}(u - \text{Id}) = \text{Vect}(e_1), \text{Ker}(u - 2\text{Id}) = \text{Vect}(e_2), \text{Ker}(u - 2\text{Id})^2 = \text{Vect}(e_2, e_3).$

Et $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(\chi_u(u)) = \text{Ker}(u - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(u - 2\text{Id})^2$, donc (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Par construction, on a $u(e_1) = e_1$ et $u(e_2) = 2e_2$. De plus

$$u(e_3) = Ae_3 = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e_2 + 2e_3.$$

Ecrivons la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$:

$B = \text{Mat}_{(e_1, e_2, e_3)}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Q16. On remarque que :

$$B = D_1 + N_1 \text{ avec } D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et D_1 est diagonale donc diagonalisable; $N_1^2 = 0$ donc N_1 est nilpotente; D_1 et N_1 commutent car $D_1 N_1 = N_1 D_1 = 2N_1$. Donc :

$\left(D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est la décomposition de Dunford de B .

Puisque A et B représentent la matrice du même endomorphisme u dans la base canonique et dans la base $\mathcal{B}$, on a la formule de changement de base $P^{-1}AP = B$ i.e. $A = PBP^{-1}$. De plus on obtient l'inverse de P en remarquant que :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_1 + e_2 + e_3, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 - e_3, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3. \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose $D = PD_1P^{-1}$ et $N = PN_1P^{-1}$. Alors :

- $A = PBP^{-1} = P(D_1 + N_1)P^{-1} = PD_1P^{-1} + PN_1P^{-1} = D + N$.
- $D = PD_1P^{-1}$ est semblable à la matrice diagonale D_1 donc D est diagonalisable.
- $N^2 = (PN_1P^{-1})^2 = PN_1^2P^{-1} = 0$ donc N est nilpotente.
- D et N commutent car D_1 et N_1 commutent :

$$\begin{aligned} DN &= (PD_1P^{-1})(PN_1P^{-1}) = P(D_1N_1)P^{-1} \\ &= P(N_1D_1)P^{-1} = (PN_1P^{-1})(PD_1P^{-1}) = ND. \end{aligned}$$

Donc (D, N) est la décomposition de Dunford de A . Calculons ces matrices :

$$D = PD_1P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Puis :

$$N = PN_1P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \text{ est la décomposition de Dunford de } A.$$

Q17. On décompose la fraction en éléments simples. Il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{(X-2)^2} = \frac{(a+b)X^2 + (c-b-4a)X + 4a-c}{(X-1)(X-2)^2}.$$

Par identification des coefficients,

$$\begin{cases} a+b &= 0. \\ c-b-4a &= 0. \\ 4a-c &= 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1. \\ b &= -1. \\ c &= 3. \end{cases}$$

Donc

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{1}{X-1} + \frac{-X+3}{(X-2)^2}.$$

On en déduit par multiplication par $(X-1)(X-2)^2$: $1 = (X-2)^2 + (-X+3)(X-1)$.

Posons $U(X) = -X+3$, $V(X) = 1$. On a $\deg(U) = 1 < 2$, $\deg(V) = 0 < 1$ et

$$(X-1)U(X) + (X-2)^2V(X) = 1.$$

Q18. • On pose $p = V(u) \circ (u - 2\text{Id})^2$ et $q = U(u) \circ (u - \text{Id})$.

On a obtenu à la question **Q10** la relation $U(X)(X-1) + V(X)(X-2)^2 = 1$. On considère les polynômes d'endomorphismes :

$$p + q = U(u) \circ (u - \text{Id}) + V(u) \circ (u - 2\text{Id})^2 = 1(u) = \text{Id}.$$

Donc $p + q = \text{Id}$.

- Posons $F = \text{Ker}(u - \text{Id})$ et $G = \text{Ker}(u - 2\text{Id})^2$.

Soit $x \in F$. Alors $(u - \text{Id})(x) = 0$, donc :

$$\begin{aligned} q(x) &= U(u) \circ (u - \text{Id})(x) = 0. \\ p(x) &= p(x) + q(x) = \text{Id}(x) = x. \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in F, p(x) = x, q(x) = 0$.

Soit $x \in G$. Alors $(u - 2\text{Id})^2(x) = 0$, donc :

$$\begin{aligned} p(x) &= V(u) \circ (u - 2\text{Id})^2(x) = 0. \\ q(x) &= p(x) + q(x) = \text{Id}(x) = x. \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in G, p(x) = 0, q(x) = x$.

Puisque $E = F \oplus G$, tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On obtient :

$$\begin{aligned} p(x) &= p(x_F) + p(x_G) = x_F + 0 = x_F. \\ q(x) &= q(x_F) + q(x_G) = 0 + x_G = x_G. \end{aligned}$$

On a montré que

$$p \text{ est le projecteur sur } F = \text{Ker}(u - \text{Id}) \text{ parallèlement à } G = \text{Ker}(u - 2\text{Id})^2$$

et

$$q \text{ est le projecteur sur } G = \text{Ker}(u - 2\text{Id})^2 \text{ parallèlement à } F = \text{Ker}(u - \text{Id}).$$

Q19. On pose $d = p + 2q$.

Puisque $e_1 \in \text{Ker}(u - \text{Id})$, on a $p(e_1) = e_1$ et $q(e_1) = 0$. D'où $d(e_1) = p(e_1) + 2q(e_1) = e_1$.
Puisque $e_2 \in \text{Ker}(u - 2\text{Id})^2$, on a $p(e_2) = 0$ et $q(e_2) = e_2$. D'où $d(e_2) = p(e_2) + 2q(e_2) = 2e_2$.

De même, $e_3 \in \text{Ker}(u - 2\text{Id})^2$ donc $d(e_3) = 2e_3$.

On obtient la matrice de d dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} d(e_1) &= e_1. \\ d(e_2) &= 2e_2. \\ d(e_3) &= 2e_3. \end{cases} \Rightarrow \text{Mat}(e_1, e_2, e_3)(d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(On retrouve la matrice D_1 de la décomposition de Dunford de B .) Or

$$\begin{aligned} p &= V(u) \circ (u - 2\text{Id})^2 \\ &= (X - 2)^2(u) \\ &= (X^2 - 4X + 4)(u) \\ q &= U(u) \circ (u - \text{Id}) \\ &= ((-X + 3)(X - 1))(u) \\ &= (-X^2 + 4X - 3)(u). \\ d &= p + 2q \\ &= ((X^2 - 4X + 4) + 2(-X^2 + 4X - 3))(u) \\ &= (-X^2 + 4X - 2)(u). \end{aligned}$$

Donc $d = (-X^2 + 4X - 2)(u)$ et $D = (-X^2 + 4X - 2)(A) = -A^2 + 4A - 2I$. Enfin $N = A - D = A^2 - 3A + 2I$.

Donc

$$(D = -A^2 + 4A - 2I, N = A^2 - 3A + 2I) \text{ est la décomposition de Dunford de } A.$$

Effectuons les calculs :

$$\begin{cases} A &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \\ A^2 &= \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 7 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad \begin{cases} D &= -A^2 + 4A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \\ N &= A^2 - 3A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

On retrouve le même résultat qu'à la question **Q9**.

Partie III - Une preuve de l'unicité de la décomposition

Q20. • Soient u et v deux endomorphismes de E qui commutent.

Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$ une valeur propre de u et $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre associé. Soit $x \in E_\lambda(u)$. Alors $u(x) = \lambda x$. Puisque u et v commutent :

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x).$$

D'où $v(x) \in E_\lambda(u)$. On a montré que $\forall x \in E_\lambda(u), v(x) \in E_\lambda(u)$. Donc $E_\lambda(u)$ est stable par v .

Tout sous-espace propre de u est stable par v .

- Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent.
On note $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ les valeurs propres de u deux à deux distinctes.
Pour $i \in [1, p]$, $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par v . Notons v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$.
Puisque v est diagonalisable, il existe un polynôme P scindé à racines simples qui annule v , alors P annule également v_i donc v_i est diagonalisable. Soit $\mathcal{B}_i$ une base de $E_{\lambda_i}(u)$ formée de vecteurs propres de v_i , alors ce sont des vecteurs propres de v .
De plus $\mathcal{B}_i$ est aussi formée de vecteurs propres de u car $\forall x \in E_{\lambda_i}(u), u(x) = \lambda_i x$.
Puisque u est diagonalisable, E se décompose en somme directe des sous-espaces propres de u :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u).$$

$\mathcal{B}_i$ est une base de $E_{\lambda_i}(u)$ donc $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de E , formée de vecteurs propres de u et de v .

Il existe une base $\mathcal{B}$ commune de diagonalisation de u et v .

Q21. Soient A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent.
D'après la question **Q13**, il existe une base commune $\mathcal{B}$ de diagonalisation pour les endomorphismes associés. Donc il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$, qui est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à la base $\mathcal{B}$, telle que $P^{-1}AP = D_1$ et $P^{-1}BP = D_2$ soient deux matrices diagonales.
Alors $P^{-1}(A - B)P = P^{-1}AP - P^{-1}BP = D_1 - D_2$ est diagonale, donc $A - B$ est diagonalisable.

Si A et B sont deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent, alors $A - B$ est diagonalisable.

Q22. Soient A et B deux matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent.
On suppose que A est nilpotente d'indice p et que B est nilpotente d'indice q . On a $A^p = 0$ et $B^q = 0$.

Puisque A et B commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$(A - B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^k (-1)^{p+q-1-k} B^{p+q-1-k}.$$

Si $k \geq p$, alors $A^k = 0$.

Sinon, on a $k \leq p-1$, donc $p+q-1-k \geq q$, d'où $B^{p+q-1-k} = 0$.

On en déduit que tous les termes de la somme sont nuls, donc $(A - B)^{p+q-1} = 0$ et $A - B$ est nilpotente, d'indice de nilpotence inférieur ou égal à $p+q-1$.

Si A et B sont deux matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent, alors $A - B$ est nilpotente.

Q23. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ à la fois diagonalisable et nilpotente.

Puisque A est nilpotente, 0 est la seule valeur propre de A . Puisque A est diagonalisable avec $\text{Sp}(A) = \{0\}$, A est semblable à la matrice diagonale $D \in M_n(\mathbb{C})$ comprenant des 0 sur la diagonale. Donc $D = 0$ et A est semblable donc égale à la matrice nulle. Ainsi $A = 0$.

Réciproquement, la matrice nulle est diagonalisable et nilpotente.

La seule matrice de $M_n(\mathbb{K})$ à la fois diagonalisable et nilpotente est la matrice nulle.

Q24. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On admet l'existence de la décomposition de Dunford. Montrons l'unicité.

- Soient (D, N) et (D', N') deux couples qui conviennent. $A = D + N = D' + N'$, avec D, D' diagonalisables, N, N' nilpotentes, $DN = ND$, $D'N' = N'D'$. De plus D et N sont des polynômes en A .
- D' commute avec N' , donc avec $A = D' + N'$. Alors D' commute avec tout polynôme en A , donc D' commute avec D .
- De même, N' commute avec D' , donc avec $A = D' + N'$. Alors N' commute avec tout polynôme en A , donc N' commute avec N .
- On a $D - D' = N' - N$.
- D et D' sont diagonalisables et commutent. D'après la question **Q14**, $D - D'$ est diagonalisable.
- N et N' sont nilpotents et commutent. D'après la question **Q15**, $N' - N$ est nilpotente.
- $D - D' = N' - N$ est à la fois diagonalisable et nilpotente. D'après la question **Q16**, cette matrice est la matrice nulle.
- On en déduit que $D - D' = N' - N = 0$, d'où $D = D'$ et $N = N'$.

Il y a unicité du couple (D, N) dans la décomposition de Dunford.