

Fractions

Prérequis

Règles de calcul sur les fractions.

Calculs dans l'ensemble des rationnels

Calcul 2.1 — Simplification de fractions.

Simplifier les fractions suivantes (la lettre k désigne un entier naturel).

a) $\frac{32}{40}$

c) $\frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$

b) $8^3 \times \frac{1}{4^2}$

d) $\frac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$

Calcul 2.2 — Sommes, produits, quotients, puissances.



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $\frac{2}{4} - \frac{1}{3}$

c) $\frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5$

b) $\frac{2}{3} - 0,2$

d) $-\frac{2}{15} \div (-\frac{6}{5})$

Calcul 2.3



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $(2 \times 3 \times 5 \times 7)(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7})$

b) $(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10}) \times \frac{21}{24}$

c) $\frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$

d) $\frac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,980 \times 21 + 1958}{1\,980 \times 1\,979 - 1\,978 \times 1\,979}$

Calcul 2.4 — Un petit calcul.



Écrire $\frac{0,5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{0,5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0,2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3,5}$ sous forme d'une fraction irréductible.

Calcul 2.5 — Le calcul littéral à la rescousse.



En utilisant les identités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.

a) $\frac{2\,022}{(-2\,022)^2 + (-2\,021)(2\,023)}$...

c) $\frac{1\,235 \times 2\,469 - 1\,234}{1\,234 \times 2\,469 + 1\,235}$

b) $\frac{2\,021^2}{2\,020^2 + 2\,022^2 - 2}$

d) $\frac{4\,002}{1\,000 \times 1\,002 - 999 \times 1\,001}$...

Calcul 2.6 — Les fractions et le calcul littéral.



Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

- a) $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
- b) $\frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, distincts deux à deux.
- c) $\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

Calcul 2.7 — Le quotient de deux sommes de Gauss.



Simplifier $\frac{\sum_{k=0}^{n^2} k}{\sum_{k=0}^n k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la formule $1 + 2 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2}$

Calcul 2.8 — Décomposition en somme d'une partie entière et d'une partie décimale.



Soit $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Écrire les fractions suivantes sous la forme $a + \frac{b}{X}$ avec a et b entiers et $X \in \mathbb{R}$.

- a) $\frac{29}{6}$ b) $\frac{k}{k-1}$... c) $\frac{3x-1}{x-2}$..

Calcul 2.9 — Un produit de fractions.



Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On donne $A = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2}$ et $B = (1+t^2)(1+t)^2$.

Simplifier AB autant que possible.

Comparaison

Calcul 2.10 — Règles de comparaison.



Comparer les fractions suivantes avec le signe « > », « < » ou « = ».

- a) $\frac{3}{5} \dots \frac{5}{9}$ b) $\frac{12}{11} \dots \frac{10}{12}$ c) $\frac{125}{25} \dots \frac{105}{21}$

Calcul 2.11 — Produit en croix.



Les nombres $A = \frac{33\ 215}{66\ 317}$ et $B = \frac{104\ 348}{208\ 341}$ sont-ils égaux ? Oui ou non ?

Calcul 2.12 — Produit en croix.



On pose $A = \frac{100\ 001}{1\ 000\ 001}$ et $B = \frac{1\ 000\ 001}{10\ 000\ 001}$: a-t-on $A > B$, $A = B$ ou $A < B$?

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccccccccc} \frac{-1}{n(n+1)^2} & -\frac{ab}{a-b} & 2 & 3 & \frac{12}{11} > \frac{10}{12} & \frac{1}{2} & 247 & \frac{n^3+n}{n+1} & 1\ 000 & \frac{1}{9} \\ 2t & 2\ 022 & \frac{-10}{3} & \frac{4}{5} & 3 + \frac{5}{x-2} & \frac{3}{2}n & \frac{203}{24} & \frac{7}{15} & \frac{1}{6} & \frac{3}{5} > \frac{5}{9} & 9 \\ 4 + \frac{5}{6} & A > B & 1 & \frac{16}{35} & 2^5 & -2 \times 3^{3k-2} & \text{Non} & 1 + \frac{1}{k-1} & \frac{125}{25} = \frac{105}{21} \end{array}$$

Puissances

Prérequis

Opérations sur les puissances (produits, quotients), décomposition en facteurs premiers, sommes d'expressions fractionnaires (même dénominateur), identités remarquables, factorisations et développements simples.

Calcul 3.1



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a) $10^5 \cdot 10^3$	c) $\frac{10^5}{10^3}$	e) $\frac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$
b) $(10^5)^3$	d) $\frac{10^{-5}}{10^{-3}}$	f) $\frac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$

Calcul 3.2



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme a^n avec a et n deux entiers relatifs.

a) $3^4 \cdot 5^4$	c) $\frac{2^5}{2^{-2}}$	e) $\frac{6^5}{2^5}$
b) $(5^3)^{-2}$	d) $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5}$	f) $\frac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}}$

Calcul 3.3



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \cdot 3^p$, où n et p sont deux entiers relatifs.

a) $\frac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}$	c) $\frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$
b) $2^{21} + 2^{22}$	d) $\frac{(3^2 \cdot (-2)^4)^8}{((-3)^5 \cdot 2^3)^{-2}}$

Calcul 3.4



Dans chaque cas, simplifier au maximum.

a) $\frac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}}$	c) $\frac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}}$
b) $\frac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4}$	d) $\frac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6}$

Calcul 3.5



Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x .

a) $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1}$	c) $\frac{x^2}{x^2-x} + \frac{x^3}{x^3+x^2} - \frac{2x^2}{x^3-x}$
b) $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4}$	d) $\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x}$

Réponses mélangées

$\frac{x}{x+1}$	15^4	$\frac{2x}{x+1}$	$2^{21} \cdot 3$	10^{15}	11	5^{-6}	$2^{38} \cdot 3^{26}$
10^2	10^8	10^{-2}	$2^{-4} \cdot 3^{-1}$	$2^6 \cdot 5$	3^5	$(-7)^{-2}$	
$\frac{2}{x-2}$	10^4	8	2^7	10^{-8}	3^{10}	$\frac{1}{x-2}$	3^{28} 2

Calcul littéral

Prérequis

Les identités remarquables.

Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, on tâchera de mener les calculs avec le minimum d'étapes. Idéalement, on écrira directement le résultat. La variable x représente un nombre réel (ou complexe).

Calcul 4.1



Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x .

- | | | | |
|--|----------------------|---------------------------------|----------------------|
| a) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^3$ | <input type="text"/> | d) $(x+1)^2(x-1)(x^2+x+1)$ | <input type="text"/> |
| b) $(x-1)^3(x^2+x+1)$ | <input type="text"/> | e) $(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)$ | <input type="text"/> |
| c) $(x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)$ | <input type="text"/> | f) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ | <input type="text"/> |

Calcul 4.2



Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de x .

- | | |
|--|----------------------|
| a) $(x-2)^2(-x^2+3x-1) - (2x-1)(x^3+2)$ | <input type="text"/> |
| b) $(2x+3)(5x-8) - (2x-4)(5x-1)$ | <input type="text"/> |
| c) $\left((x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)+1\right)x - x^6 - x^5 + 2$ | <input type="text"/> |
| d) $(x+1)(x-1)^2 - 2(x^2+x+1)$ | <input type="text"/> |
| e) $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)\left(1 - \sqrt{2}x + x^2\right)$ | <input type="text"/> |
| f) $(x^2+x+1)^2$ | <input type="text"/> |

Factoriser

Calcul 4.3 — Petite mise en jambe.



Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle x suivantes.

- | | |
|---------------------------------------|----------------------|
| a) $-(6x+7)(6x-1) + 36x^2 - 49$ | <input type="text"/> |
| b) $25 - (10x+3)^2$ | <input type="text"/> |
| c) $(6x-8)(4x-5) + 36x^2 - 64$ | <input type="text"/> |
| d) $(-9x-8)(8x+8) + 64x^2 - 64$ | <input type="text"/> |

Calcul 4.4 — À l'aide de la forme canonique.



Factoriser les polynômes de degré deux suivants en utilisant leur forme canonique. On rappelle que la forme canonique de $ax^2 + bx + c$ est $a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$ (où $a \neq 0$).

- | | | | |
|-------------------------|----------------------|---------------------------|----------------------|
| a) $x^2 - 2x + 1$ | <input type="text"/> | d) $3x^2 + 7x + 1$ | <input type="text"/> |
| b) $x^2 + 4x + 4$ | <input type="text"/> | e) $2x^2 + 3x - 28$ | <input type="text"/> |
| c) $x^2 + 3x + 2$ | <input type="text"/> | f) $-5x^2 + 6x - 1$ | <input type="text"/> |

Calcul 4.5 — Avec plusieurs variables.



Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

- | | | | |
|--------------------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) $(x + y)^2 - z^2$ | <input type="text"/> | d) $xy - x - y + 1$ | <input type="text"/> |
| b) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 169x^2$ | <input type="text"/> | e) $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y$.. | <input type="text"/> |
| c) $xy + x + y + 1$ | <input type="text"/> | f) $y^2(a^2 + b^2) + 16x^4(-a^2 - b^2)$.. | <input type="text"/> |

Calcul 4.6 — On passe au niveau supérieur.



Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

- | | |
|---|----------------------|
| a) $x^4 - 1$ | <input type="text"/> |
| b) $(-9x^2 + 24)(8x^2 + 8) + 64x^4 - 64$ | <input type="text"/> |
| c) $x^4 + x^2 + 1$ | <input type="text"/> |
| d) $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ | <input type="text"/> |
| e) $(ap + bq + cr + ds)^2 + (aq - bp - cs + dr)^2 + (ar + bs - cp - dq)^2 + (as - br + cq - dp)^2$.. | <input type="text"/> |

Réponses mélangées

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4 & (a^2 + b^2)(y - 4x^2)(y + 4x^2) & (x + 1)(x + 2) & & & & \\
 2 + x^3 - x^4 - x^5 & x^5 - x^3 - x^2 + 1 & (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) & & & & \\
 2\left(x + \frac{3 - \sqrt{233}}{4}\right)\left(x + \frac{3 + \sqrt{233}}{4}\right) & 2(3x - 4)(10x + 3) & 1 + x^4 & (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) & & & \\
 (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) & (x + y - z)(x + y + z) & 4(5x + 4)(-5x + 1) & & & & \\
 -1 - 3x - 3x^2 + x^3 & x^4 + x^2 + 1 & 3(14x + 3y)(-4x + y) & (x + 1)(y + 1) & & & \\
 x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1 & (x - 1)^2 & (x + y)(x + 1)^2 & -6(6x + 7) & & & \\
 8x^3 - 6x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8} & -5(x - 1)\left(x - \frac{1}{5}\right) & (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) & (x - 1)(y - 1) & (x + 2)^2 & & \\
 -2 + 12x - 17x^2 + 8x^3 - 3x^4 & x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1 & x^5 - x^3 + x^2 - 1 & -28 + 21x & & & \\
 -8(x^2 + 1)(x - 4)(x + 4) & 3\left(x + \frac{7 - \sqrt{37}}{6}\right)\left(x + \frac{7 + \sqrt{37}}{6}\right) & -8(x + 1)(x + 16) & & & &
 \end{array}$$

Fiche n° 2. Fractions

Réponses

2.1 a)	$\frac{4}{5}$	2.3 c)	$\frac{-10}{3}$	2.7	$\frac{n^3 + n}{n + 1}$
2.1 b)	2^5	2.3 d)	$1\,000$	2.8 a)	$4 + \frac{5}{6}$
2.1 c)	3	2.4	$\frac{16}{35}$	2.8 b)	$1 + \frac{1}{k - 1}$
2.1 d)	$-2 \times 3^{3k-2}$	2.5 a)	$2\,022$	2.8 c)	$3 + \frac{5}{x - 2}$
2.2 a)	$\frac{1}{6}$	2.5 b)	$\frac{1}{2}$	2.9	$2t$
2.2 b)	$\frac{7}{15}$	2.5 c)	1	2.10 a)	$\frac{3}{5} > \frac{5}{9}$
2.2 c)	9	2.5 d)	2	2.10 b)	$\frac{12}{11} > \frac{10}{12}$
2.2 d)	$\frac{1}{9}$	2.6 a)	$\frac{-1}{n(n+1)^2}$	2.10 c)	$\frac{125}{25} = \frac{105}{21}$
2.3 a)	247	2.6 b)	$-\frac{ab}{a-b}$	2.11	Non
2.3 b)	$\frac{203}{24}$	2.6 c)	$\frac{3}{2}n$	2.12	$A > B$

Corrigés

2.1 a) $\frac{32}{40} = \frac{8 \times 4}{8 \times 5} = \frac{4}{5}$

2.1 b) $8^3 \times \frac{1}{4^2} = (2 \times 4)^3 \times \frac{1}{4^2} = 2^3 \times 4^3 \times \frac{1}{4^2} = 2^3 \times 4 = 2^5$

2.1 c) $\frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4} = \frac{(3^3)^{-1} \times (2^2)^2}{3^{-4} \times 2^4} = \frac{3^4}{3^3} = 3$

2.1 d) On a : $\frac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}} = \frac{(-2) \times (-2)^{2k} \times 3^{2k} \times 3^{-1}}{4^k \times 3^{-k} \times 3} = \frac{(-2) \times 4^k \times 3^{2k} \times 3^k}{4^k \times 3^2} = -2 \times 3^{3k-2}$.

2.2 a) On met au même dénominateur : $\frac{2}{4} - \frac{1}{3} = \frac{2 \times 3}{4 \times 3} - \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{6}{12} - \frac{4}{12} = \frac{6-4}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

2.2 b) On transforme 0,2 en fraction et on met au même dénominateur :

$$\frac{2}{3} - 0,2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{10} = \frac{2 \times 10}{3 \times 10} - \frac{2 \times 3}{10 \times 3} = \frac{20}{30} - \frac{6}{30} = \frac{20-6}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7 \times 2}{15 \times 2} = \frac{7}{15}.$$

2.2 c) Pour multiplier des fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5 = \frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times \frac{5}{1} = \frac{36 \times 15 \times 5}{25 \times 12 \times 1} = \frac{12 \times 3 \times 5 \times 3 \times 5}{5 \times 5 \times 12 \times 1} = \frac{3 \times 3}{1} = \frac{9}{1} = 9.$$

2.2 d) Pour diviser une fraction par une autre, on la multiplie par la fraction inverse de la deuxième fraction :

$$-\frac{2}{15} \div \left(-\frac{6}{5}\right) = -\frac{2}{15} \times \left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{2}{15} \times \frac{5}{6} = \frac{2 \times 5}{15 \times 6} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5 \times 2 \times 3} = \frac{1}{9}.$$

2.3 a) On développe :

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) = \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{2} + \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{3} + \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{5} + \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{7}$$

$$= 3 \times 5 \times 7 + 2 \times 5 \times 7 + 2 \times 3 \times 7 + 2 \times 3 \times 5 = 105 + 70 + 42 + 30 = 247.$$

2.3 b) On simplifie d'abord, puis on applique les règles de calcul :

$$\left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10} \right) \times \frac{21}{24} = \left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{31}{5} \right) \times \frac{7}{8}$$

$$= \left(\frac{136}{15} + \frac{3}{5} \right) \times \frac{7}{8} = \left(\frac{136}{15} + \frac{9}{15} \right) \times \frac{7}{8} = \frac{145}{15} \times \frac{7}{8} = \frac{29}{3} \times \frac{7}{8} = \frac{203}{24}.$$

2.3 c) On simplifie d'abord les termes comportant des exposants :

$$\frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3} = \frac{5^{10} \times 7^3 - 5^{10} \times 7^4}{5^9 \times 7^3 + 5^9 \times 7^3 \times 2^3} = \frac{5^{10} \times 7^3 (1 - 7)}{5^9 \times 7^3 (1 + 2^3)} = \frac{5 \times (-6)}{9} = \frac{-10}{3}.$$

2.3 d) On calcule :

$$\frac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,980 \times 21 + 1\,958}{1\,980 \times 1\,979 - 1\,978 \times 1\,979} = \frac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,979 \times 21 + 21 + 1\,958}{1\,979 \times (1\,980 - 1\,978)}$$

$$= \frac{1\,979 \times (1\,978 + 21) + 1\,979}{1\,979 \times 2} = \frac{1\,979 \times (1\,978 + 21 + 1)}{1\,979 \times 2} = \frac{1\,979 \times 2\,000}{1\,979 \times 2}$$

$$= 1\,000.$$

2.4 On calcule :

$$\frac{0,5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{0,5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0,2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3,5} = \frac{\frac{3}{6} - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - \frac{7}{2}}$$

$$= \frac{3 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{17} + \frac{1}{37} \right)}{5 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{17} + \frac{1}{37} \right)} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{-7 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right)} = \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \frac{16}{35}.$$

2.5 a) On connaît l'identité remarquable : $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Donc : $\frac{2\,022}{(-2\,022)^2 + (-2\,021)(2\,023)} = \frac{2\,022}{(2\,022)^2 + (1 - 2\,022) \times (1 + 2\,022)} = \frac{2\,022}{(2\,022)^2 + 1 - 2\,022^2} = 2\,022.$

2.5 b) On fait apparaître 2 021 dans 2 020 et 2 022 au dénominateur :

$$\frac{2\,021^2}{2\,020^2 + 2\,022^2 - 2} = \frac{2\,021^2}{(2\,021 - 1)^2 + (2\,021 + 1)^2 - 2}$$

$$= \frac{2\,021^2}{2\,021^2 - 2 \times 2\,021 \times 1 + 1 + 1 + 2\,021^2 + 2 \times 2\,021 \times 1 + 1 - 2}$$

$$= \frac{2\,021^2}{2\,021^2 - 2 \times 2\,021 \times 1 + 2\,021^2 + 2 \times 2\,021 \times 1} = \frac{2\,021}{2\,021 - 2 + 2\,021 + 2} = \frac{1}{2}.$$

2.5 c) En posant $a = 1\,234$, on a : $1\,235 = a + 1$ et $2\,469 = 2a + 1$.

Donc : $\frac{1\,235 \times 2\,469 - 1\,234}{1\,234 \times 2\,469 + 1\,235} = \frac{(a + 1)(2a + 1) - a}{a(2a + 1) + a + 1} = \frac{2a^2 + 2a + 1}{2a^2 + 2a + 1} = 1.$

2.5 d) En posant $a = 1\,000$, on a : $999 = a - 1$, $1\,001 = a + 1$, $1\,002 = a + 2$ et $4\,002 = 4a + 2$.

Donc : $\frac{4\,002}{1\,000 \times 1\,002 - 999 \times 1\,001} = \frac{4a + 2}{a(a + 2) - (a - 1)(a + 1)} = \frac{2(2a + 1)}{a^2 + 2a - (a^2 - 1)} = \frac{2(2a + 1)}{2a + 1} = 2.$

2.6 a) On met au même dénominateur. Cela donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} &= \frac{n}{n(n+1)^2} + \frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} - \frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} \\ &= \frac{n + n^2 + n - (n^2 + 2n + 1)}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2}.\end{aligned}$$

2.6 b) On rappelle la formule : $a^3 - b^3 = (a-b)(ab + a^2 + b^2)$. Cela donne :

$$\frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b} = \frac{(a-b)(ab + a^2 + b^2)}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b} = \frac{ab + a^2 + b^2}{a-b} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a-b} = -\frac{ab}{a-b}.$$

2.6 c) Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on a :

$$\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}} = \frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)} \times \frac{n^2(n-1)^2}{2n+2} = \frac{6(n+1)}{2(n-1)} \times \frac{n(n-1)}{2(n+1)} = \frac{3}{2}n.$$

2.7 De $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, on a : $\frac{\sum_{k=0}^{n^2} k}{\sum_{k=0}^n k} = \frac{\frac{n^2(n^2+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n^2(n^2+1)}{2} \frac{2}{n(n+1)} = \frac{n(n^2+1)}{n+1} = \frac{n^3+n}{n+1}.$

2.8 a) On trouve $\frac{29}{6} = \frac{4 \times 6 + 5}{6} = 4 + \frac{5}{6}.$

2.8 b) On trouve $\frac{k}{k-1} = \frac{k-1+1}{k-1} = 1 + \frac{1}{k-1}.$

2.8 c) On trouve $\frac{3x-1}{x-2} = \frac{3(x-2)+5}{x-2} = 3 + \frac{5}{x-2}.$

2.9 Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a :

$$A = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(1+t)^2} - \frac{1+t^2}{(1+t^2)(1+t)^2} = \frac{1+2t+t^2 - (1+t^2)}{(1+t^2)(1+t)^2} = \frac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2}.$$

Donc, $AB = \left(\frac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2} \right) \times (1+t^2)(1+t)^2 = 2t.$

2.10 a) $\frac{3}{5} = \frac{27}{45} > \frac{5}{9} = \frac{25}{45}$

2.10 c) $\frac{125}{25} = 5 = \frac{105}{21}$

2.11 Nous allons étudier les produits en croix.

On sait que $A = B$, si et seulement si $33\,215 \times 208\,341 = 66\,317 \times 104\,348$. Le nombre de gauche est le produit de deux nombres impairs, il est impair. Par contre, le nombre de droite est le produit de deux nombres de parités différentes, il est pair. Par conséquent, l'égalité n'est pas vérifiée. A et B ne sont pas égaux.

2.12 On ré-écrit $A = \frac{10^5+1}{10^6+1}$ et $B = \frac{10^6+1}{10^7+1}$. Nous allons étudier les produits en croix.

D'une part calculons : $(10^5+1) \times (10^7+1) = 10^{12} + 10^7 + 10^5 + 1.$

D'autre part : $(10^6+1)^2 = 10^{12} + 2 \times 10^6 + 1.$

Comme $(10^5+1) \times (10^7+1) > (10^6+1) \times (10^6+1)$, on obtient : $A > B.$

Fiche n° 3. Puissances

Réponses

3.1 a).....	10^8	3.2 b).....	5^{-6}	3.3 b).....	$2^{21} \cdot 3$	3.5 a).....	$\frac{x}{x+1}$
3.1 b).....	10^{15}	3.2 c).....	2^7	3.3 c).....	2	3.5 b).....	$\frac{1}{x-2}$
3.1 c).....	10^2	3.2 d).....	$(-7)^{-2}$	3.3 d).....	$2^{38} \cdot 3^{26}$	3.5 c).....	$\frac{2x}{x+1}$
3.1 d).....	10^{-2}	3.2 e).....	3^5	3.4 a).....	8	3.5 d).....	$\frac{2}{x-2}$
3.1 e).....	10^4	3.2 f).....	3^{28}	3.4 b).....	11		
3.1 f).....	10^{-8}	3.3 a).....	$2^{-4} \cdot 3^{-1}$	3.4 c).....	3^{10}		
3.2 a).....	15^4			3.4 d).....	$2^6 \cdot 5$		

Corrigés

3.3 a) $\frac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 2^{-1} \cdot 3^{-1}} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{3^{4-1} \cdot 2^{8-1}} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{3^3 \cdot 2^7} = 2^{3-7} \cdot 3^{2-3} = 2^{-4} \cdot 3^{-1}.$

3.3 b) On factorise : $2^{21} + 2^{22} = 2^{21} + 2^{21} \cdot 2 = 2^{21} \cdot (1 + 2) = 2^{21} \cdot 3.$

3.3 c) On factorise au numérateur et au dénominateur : $\frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}} = \frac{(3 + 1) \cdot 3^{21}}{(3 - 1) \cdot 3^{21}} = \frac{4}{2} = 2.$

3.3 d) On simplifie en appliquant les règles habituelles de calcul avec les puissances, et en exploitant le fait que $(-a)^n = a^n$ lorsque n est pair : $\frac{(3^2 \cdot (-2)^4)^8}{((-3)^5 \cdot 2^3)^{-2}} = \frac{3^{16} \cdot 2^{32}}{3^{-10} \cdot 2^{-6}} = 2^{38} \cdot 3^{26}.$

3.4 a) On fait apparaître les facteurs premiers 2 et 3 : $\frac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}} = \frac{2^{3 \cdot 17} \cdot 2^{-6} \cdot 3^{-6}}{3^{2 \cdot (-3)} \cdot 2^{42}} = \frac{2^{51-6} \cdot 3^{-6}}{3^{-6} \cdot 2^{42}} = 2^{45-42} = 2^3 = 8.$

3.4 b) Avec les facteurs premiers 5 et 11 : $\frac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4} = \frac{(5 \cdot 11)^2 \cdot (11^2)^{-2} \cdot (5^3)^2}{5^2 \cdot 11 \cdot (11^2 \cdot 5)^{-2} \cdot (5^2)^4} = \frac{5^8 \cdot 11^{-2}}{5^8 \cdot 11^{-3}} = 11.$

3.4 c) On fait apparaître les facteurs premiers 2, 3 et 5 : $\frac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}} = \frac{(2^2)^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 3^4 \cdot 5^4}{(5^2)^2 \cdot 2^{-4} \cdot (3^2)^{-4}} = \frac{2^{-4} \cdot 3^2 \cdot 5^4}{2^{-4} \cdot 3^{-8} \cdot 5^4} = 3^{10}.$

3.4 d) Même méthode que précédemment : $\frac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6} = \frac{2^6 \cdot 3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^5 \cdot 7^5 \cdot 2^2 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 7^3 \cdot 2^4 \cdot 7^2 \cdot 3^6 \cdot 5^6} = \frac{2^{13} \cdot 3^6 \cdot 5^7 \cdot 7^5}{2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 7^5} = 2^6 \cdot 5.$

3.5 a) On met au même dénominateur les deux premières écritures fractionnaires : $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{x(x+1) - 2(x-1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{x^2+x-2x+2}{(x+1)(x-1)} - \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2-x}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x+1}$

3.5 b) Même méthode : $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4} = \frac{2(x-2) - (x+2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{8}{(x+2)(x-2)} = \frac{2x-4-x-2+8}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$

3.5 c) On commence par simplifier les puissances superflues, puis c'est le même principe que précédemment : $\frac{x^2}{x^2-x} + \frac{x^3}{x^3+x^2} - \frac{2x^2}{x^3-x} = \frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1} - \frac{2x}{x^2-1} = \frac{x(x+1+x-1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{2x}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x^2-2x}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x}{x+1}$

3.5 d) $\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x} = \frac{1}{x} + \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} + \frac{2}{x(x-2)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x(x-2)} = \frac{x-2+x}{x(x-2)} + \frac{2}{x(x-2)} = \frac{2}{x-2}$

Fiche n° 4. Calcul littéral

Réponses

4.1 a) $8x^3 - 6x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}$

4.1 b) $x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$

4.1 c) $x^5 - x^3 + x^2 - 1$

4.1 d) $x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$

4.1 e) $x^5 - x^3 - x^2 + 1$

4.1 f) $x^4 + x^2 + 1$

4.2 a) $-2 + 12x - 17x^2 + 8x^3 - 3x^4$

4.2 b) $-28 + 21x$

4.2 c) $2 + x^3 - x^4 - x^5$

4.2 d) $-1 - 3x - 3x^2 + x^3$

4.2 e) $1 + x^4$

4.2 f) $1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4$

4.3 a) $-6(6x + 7)$

4.3 b) $4(5x + 4)(-5x + 1)$

4.3 c) $2(3x - 4)(10x + 3)$

4.3 d) $-8(x + 1)(x + 16)$

4.4 a) $(x - 1)^2$

4.4 b) $(x + 2)^2$

4.4 c) $(x + 1)(x + 2)$

4.4 d) $3\left(x + \frac{7 - \sqrt{37}}{6}\right)\left(x + \frac{7 + \sqrt{37}}{6}\right)$

4.4 e) $2\left(x + \frac{3 - \sqrt{233}}{4}\right)\left(x + \frac{3 + \sqrt{233}}{4}\right)$

4.4 f) $-5(x - 1)\left(x - \frac{1}{5}\right)$

4.5 a) $(x + y - z)(x + y + z)$

4.5 b) $3(14x + 3y)(-4x + y)$

4.5 c) $(x + 1)(y + 1)$

4.5 d) $(x - 1)(y - 1)$

4.5 e) $(x + y)(x + 1)^2$

4.5 f) $(a^2 + b^2)(y - 4x^2)(y + 4x^2)$

4.6 a) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

4.6 b) $-8(x^2 + 1)(x - 4)(x + 4)$

4.6 c) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

4.6 d) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

4.6 e) $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2)$

Corrigés

4.1 a) On utilise directement l'identité remarquable $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

4.1 b) On peut écrire : $(x - 1)^3(x^2 + x + 1) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)(x^2 + x + 1) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$. Pour être "efficace", il suffit de rechercher directement le coefficient du terme d'un degré donné (sachant que $(ax^n)(bx^p) = abx^{n+p}$). Par exemple, dans l'expression finale et en utilisant l'étape intermédiaire, le coefficient du terme de degré 2 est donné par $(-3) \times 1 + 3 \times 1 + (-1) \times 1 = -1$. Ici, l'étape intermédiaire n'étant pas compliquée (à effectuer et à retenir), on peut (éventuellement) se passer de l'écrire.

4.1 c) Connaissant les identités remarquables $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ et $(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1$, on a facilement :

$$(x + 1)^2(x - 1)(x^2 - x + 1) = [(x + 1)(x - 1)][(x + 1)(x^2 - x + 1)] = (x^2 - 1)(x^3 + 1) = x^5 - x^3 + x^2 - 1.$$

Que pensez-vous de la nécessité d'écrire les étapes intermédiaires ?

4.1 d) On calcule : $(x + 1)^2(x - 1)(x^2 + x + 1) = (x^2 + 2x + 1)(x^3 - 1) = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$.

4.1 e) On calcule : $(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1) = (x^2-1)(x^3-1) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$.

4.3 a) Une identité remarquable fait apparaître le facteur commun $6x+7$. On calcule alors

$$-(6x+7)(6x-1) + 36x^2 - 49 = -(6x+7)(6x-1) + (6x)^2 - 7^2 = (6x+7)[-(6x-1) + 6x - 7] = -6(6x+7).$$

4.3 b) On calcule $25 - (10x+3)^2 = 5^2 - (10x+3)^2 = (10x+8)(-10x+2) = 4(5x+4)(-5x+1)$.

4.4 c) La forme canonique est $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$. On en déduit ensuite la factorisation à l'aide de l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

4.4 d) La forme canonique est $3\left[\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{37}{36}\right]$.

4.4 e) La forme canonique est $2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{233}{16}\right]$.

4.4 f) La forme canonique est $-5\left[\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{4}{25}\right]$.

4.5 b) On calcule $x^2 + 6xy + 9y^2 - 169x^2 = (x+3y)^2 - (13x)^2 = (14x+3y)(-12x+3y) = 3(14x+3y)(-4x+y)$.

4.5 e) On calcule $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y = (x+y)(x^2+2x+1) = (x+y)(x+1)^2$.

4.6 a) On calcule $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$.

4.6 b) On calcule $(-9x^2+24)(8x^2+8)+64x^4-64 = -8(x^2+1)[9x^2-24-8(x^2-1)] = -8(x^2+1)(x-4)(x+4)$.

4.6 c) On calcule $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$. La factorisation est alors terminée sur $\mathbb{R}$ puisque les deux équations, $x^2+x+1=0$ et $x^2-x+1=0$, n'ont pas de solutions réelles.

4.6 d) Une fois n'est pas coutume : on peut commencer par développer avant de factoriser. Ce qui donne

$$(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

Remarque : signalons tout de même qu'une autre voie (sans calcul) consiste à interpréter en termes de module d'un produit de deux nombres complexes !