

Racines carrées

Prérequis

Racines carrées. Méthode de la quantité conjuguée.

Premiers calculs

Calcul 5.1 — Définition de la racine carrée.



Simplifier les expressions suivantes en simplifiant les symboles $\sqrt{\cdot}$ qui peuvent l'être (et en prenant à ne pas se tromper sur les signes).

a) $\sqrt{(-5)^2}$

d) $\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2}$

b) $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$

e) $\sqrt{(3 - \pi)^2}$

c) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$

f) $\sqrt{(3 - a)^2}$

Calcul 5.2 — Transformation d'écriture.



Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

a) $(2\sqrt{5})^2$

e) $(3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2$

b) $(2 + \sqrt{5})^2$

f) $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4$

c) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

g) $\left(\frac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$

d) $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$

h) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$

Avec la méthode de la quantité conjuguée

Calcul 5.3



Écrire les expressions suivantes sans racines carrées au dénominateur.

a) $\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}}$

e) $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

b) $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$

f) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$

c) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

g) $\frac{5 + 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{5 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

d) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

h) $\left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}\right)^2$

Calcul 5.4



Exprimer la quantité suivante sans racine carrée au dénominateur.

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} \dots\dots\dots \boxed{}$$

Calculs variés

Calcul 5.5 — Avec une variable.



On considère la fonction f qui à $x > 1$ associe $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Pour tout $x > 1$, calculer et simplifier les expressions suivantes.

a) $f(x) + \frac{1}{f(x)}$	$\boxed{}$	d) $\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\boxed{}$
b) $\frac{f(x+2) - f(x)}{f(x+2) + f(x)}$	$\boxed{}$	e) $f(x) + 4f''(x)$	$\boxed{}$
c) $\sqrt{x+2f(x)}$	$\boxed{}$	f) $\frac{f(x)}{f''(x)}$	$\boxed{}$

Calcul 5.6 — Mettre au carré.



Élever les quantités suivantes au carré pour en donner une expression simplifiée.

a) $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$	$\boxed{}$	b) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}}$	$\boxed{}$
--	-------------------------	--	-------------------------

Calcul 5.7 — Méli-mélo.



Donner une écriture simplifiée des réels suivants.

a) $\frac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$	$\boxed{}$	d) $3e^{-\frac{1}{2}\ln 3}$	$\boxed{}$
b) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$	$\boxed{}$	e) $2\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$	$\boxed{}$
c) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$	$\boxed{}$	f) $\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$	$\boxed{}$

Calcul 5.8



On note $A = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$. Simplifier A

On commencera par exprimer A^3 en fonction de A

Réponses mélangées

$\sqrt{3}-1$	$\ln(1+\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}$	$-\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$	5
$\frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}$	$1+\sqrt{2}$	12	$9-\frac{10}{3}\sqrt{2}$	$3-2\sqrt{2}$	$1+3+\sqrt{2}$
$50-25\sqrt{3}$	$ 3-a $	$-\sqrt{3}+2$	$12\sqrt{7}$	10	$20+\sqrt{7}-2$
$-(\sqrt{2}+\sqrt{3})$	$2\sqrt{2}$	$\frac{x}{\sqrt{x-1}}$	$1+\sqrt{3}$	$-11+5\sqrt{5}$	$9+4\sqrt{5}$
$\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}$	$-4(x-1)^2$	$x-\sqrt{x^2-1}$	$1+\sqrt{x-1}$	$2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6}$	$2\sqrt{2}$
$\sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-2$	$1+\sqrt{2}$	$1-\sqrt{10}+\sqrt{15}$	$\pi-3$	$1+\sqrt{5}$	$\sqrt{3}$

Exponentielle et logarithme

Prérequis

Exponentielle, logarithme.

Logarithmes

Calcul 6.1



Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

a) $\ln 16$

d) $\frac{1}{8} \ln \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \ln \frac{1}{8}$

b) $\ln 512$

e) $\ln 72 - 2 \ln 3$

c) $\ln 0,125$

f) $\ln 36$

Calcul 6.2



Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

a) $\ln \frac{1}{12}$

d) $\ln 500$

b) $\ln(2,25)$	
----------------------	--

e) $\ln \frac{16}{25}$

c) $\ln 21 + 2 \ln 14 - 3 \ln(0,875) \dots\dots$

f) $\ln(6,25)$	
----------------------	--

Calcul 6.3



Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

$$\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \cdots + \ln \frac{98}{99} + \ln \frac{99}{100} \dots\dots\dots$$

Calcul 6.4 — Logarithme et radicaux.



a) On pose $\alpha = \frac{7}{16} \ln(3 + 2\sqrt{2}) - 4 \ln(\sqrt{2} + 1)$. Calculer $(1 + \sqrt{2})^2$ et $\frac{1}{\sqrt{2} + 1}$.

En déduire une écriture simplifiée de α en fonction de $\ln(\sqrt{2}-1)$

b) Calculer β sachant que $\ln \beta = \ln(7 + 5\sqrt{2}) + 8\ln(\sqrt{2} + 1) + 7\ln(\sqrt{2} - 1) \dots\dots\dots$

c) Simplifier $\gamma = \ln\left((2 + \sqrt{3})^{20}\right) + \ln\left((2 - \sqrt{3})^{20}\right) \dots\dots\dots$

d) Simplifier $\delta = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

Exponentielles

Calcul 6.5



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $e^{3 \ln 2}$

d) $e^{-2 \ln 3}$

b) $\ln(\sqrt{e})$

e) $\ln(e^{-\frac{1}{2}})$

c) $\ln(e^{\frac{1}{3}})$

f) $e^{\ln 3 - \ln 2}$

Calcul 6.6



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $-e^{-\ln \frac{1}{2}}$

d) $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$

b) $e^{-\ln \ln 2}$

e) $\ln(\sqrt{\exp(-\ln e^2)})$

c) $\ln\left(\frac{1}{e^{17}}\right)$

f) $\exp\left(-\frac{1}{3} \ln(e^{-3})\right)$

Études de fonctions

Calcul 6.7 — Parité.



Étudier la parité des fonctions suivantes.

a) $f_1 : x \mapsto \ln \frac{2021 + x}{2021 - x}$

b) $f_2 : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

c) $f_3 : x \mapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

d) $f_4 : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Calcul 6.8 — Étude d'une fonction.



Soit $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

a) Préciser l'ensemble de définition de cette fonction.

b) Montrer que pour tous réels a et b on a $f(a + b) = \frac{f(a) + f(b)}{1 + f(a)f(b)}$

c) Déterminer la limite de f en $+\infty$

d) Déterminer la limite de f en $-\infty$

Calcul 6.9



On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(1+x). \end{cases}$$

Calculer et simplifier les expressions suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour lequel elles sont définies.

- | | | | |
|------------------------------------|----------------------|-------------------------------------|----------------------|
| a) $f(2e^x - 1)$ | <input type="text"/> | d) $xf'(x) - 1$ | <input type="text"/> |
| b) $e^{x - \frac{1}{2}f(x)}$ | <input type="text"/> | e) $e^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}$ | <input type="text"/> |
| c) $\frac{1}{2}f(x^2 - 2x)$ | <input type="text"/> | | |

Équations, inéquations

Calcul 6.10



Résoudre les équations et inéquations suivantes (d'inconnue x).

- | | |
|---|----------------------|
| a) $e^{3x-5} \geq 12$ | <input type="text"/> |
| b) $1 \leq e^{-x^2+x}$ | <input type="text"/> |
| c) $e^{1+\ln x} \geq 2$ | <input type="text"/> |
| d) $e^{-6x} \leq \sqrt{e}$ | <input type="text"/> |
| e) $\ln(-x-5) = \ln(x-61) - \ln(x+7)$ | <input type="text"/> |
| f) $\ln(-x-5) = \ln \frac{x-61}{x+7}$ | <input type="text"/> |

Réponses mélangées

8	$\emptyset$	$-2 \ln 5 + 4 \ln 2$	ok	$3 \ln 5 + 2 \ln 2$	$-2 \ln 2 - 2 \ln 5$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\ln 2}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{2} \ln 2$	$x \geq \frac{\ln 12 + 5}{3}$	$\frac{-13 - \sqrt{273}}{2}$	$\ln x-1 $	$x \geq \frac{2}{e}$	$2 \ln 2 + 2 \ln 3$	
1	$x + \ln 2$	0	$\frac{3}{2}$	-17	$x \geq -\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{1+x}$	$(1+x)^x$ impaire
$-\ln 3 - 2 \ln 2$	$\frac{1}{3}$	-2	impaire	$\frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$	-1	$\ln 3 + 11 \ln 2$	$\mathbb{R}$
$2 \ln 5 - 2 \ln 2$	-1	1	$3 \ln 2$	$\frac{1}{2}$	$x \in [0, 1]$	0	impaire $4 \ln 2$
$2 \ln 3 - 2 \ln 2$	e	$17 + 12\sqrt{2}$	$-3 \ln 2$	$9 \ln 2$	impaire	$\frac{25}{8} \ln(\sqrt{2} - 1)$	

Fiche n° 5. Racines carrées

Réponses

5.1 a).....	$\boxed{5}$	5.3 a)	$\boxed{2 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{6}}$	5.5 c).....	$\boxed{1 + \sqrt{x-1}}$
5.1 b).....	$\boxed{\sqrt{3} - 1}$	5.3 b)	$\boxed{3 - 2\sqrt{2}}$	5.5 d)	$\boxed{\frac{1}{2} \frac{1}{x-1}}$
5.1 c).....	$\boxed{-\sqrt{3} + 2}$	5.3 c).....	$\boxed{1 - \sqrt{10} + \sqrt{15}}$	5.5 e)	$\boxed{\frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}}$
5.1 d).....	$\boxed{\sqrt{7} - 2}$	5.3 d)....	$\boxed{\sqrt{15} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - 2}$	5.5 f)	$\boxed{-4(x-1)^2}$
5.1 e).....	$\boxed{\pi - 3}$	5.3 e)	$\boxed{-(\sqrt{2} + \sqrt{3})}$	5.6 a).....	$\boxed{\sqrt{2}}$
5.1 f).....	$\boxed{ 3 - a }$	5.3 f)	$\boxed{-\frac{3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{2}}$	5.6 b)	$\boxed{2\sqrt{2}}$
5.2 a)	$\boxed{20}$	5.3 g).....	$\boxed{2\sqrt{2}}$	5.7 a).....	$\boxed{-11 + 5\sqrt{5}}$
5.2 b)	$\boxed{9 + 4\sqrt{5}}$	5.3 h)	$\boxed{50 - 25\sqrt{3}}$	5.7 b).....	$\boxed{1 + \sqrt{2}}$
5.2 c).....	$\boxed{1 + \sqrt{3}}$	5.4	$\boxed{\frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{4}}$	5.7 c).....	$\boxed{1 + \sqrt{2}}$
5.2 d).....	$\boxed{3 + \sqrt{2}}$	5.5 a).....	$\boxed{\frac{x}{\sqrt{x-1}}}$	5.7 d).....	$\boxed{\sqrt{3}}$
5.2 e).....	$\boxed{12\sqrt{7}}$	5.5 b).....	$\boxed{x - \sqrt{x^2 - 1}}$	5.7 e).....	$\boxed{1 + \sqrt{5}}$
5.2 f).....	$\boxed{12}$			5.7 f)	$\boxed{\ln(1 + \sqrt{2})}$
5.2 g).....	$\boxed{9 - \frac{10}{3}\sqrt{2}}$			5.8	$\boxed{1}$
5.2 h)	$\boxed{10}$				

Corrigés

5.1 a) Quand a est un réel positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré vaut a donc $\sqrt{(-5)^2} = 5$.

5.1 f) On trouve $|3 - a|$, c'est-à-dire $3 - a$ si $a \leq 3$ et $a - 3$ si $a \geq 3$.

5.2 c) On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{3} + 3} = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} = 1 + \sqrt{3}.$$

5.3 a) On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}} &= \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}} \times \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{(2 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} \\ &= \frac{(2 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{2})}{2^2 - 2} = \frac{4 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{2} \\ &= 2 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{6}. \end{aligned}$$

5.4 On pose $A := \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$. On a :

$$A = \frac{1}{1 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \frac{1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(1 + (\sqrt{2} + \sqrt{3}))(1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3}))} = \frac{1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})}{1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1}{4 + 2\sqrt{6}}.$$

Ainsi, la technique de la « quantité conjuguée » n'est pas suffisante ici ; mais on peut la réappliquer. On a

$$A = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1)(4 - 2\sqrt{6})}{(4 + 2\sqrt{6})(4 - 2\sqrt{6})} = \frac{4\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 6\sqrt{2} - 4 + 2\sqrt{6}}{16 - 24} = \frac{2\sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{4}.$$

Ainsi, on a $\boxed{\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{4}}$: ce qu'on cherchait.

Remarque : on pouvait aussi faire un autre type de quantité conjuguée :

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})} = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{4}.$$

5.5 c) On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{x + 2f(x)} = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{\sqrt{x-1}^2 + 2\sqrt{x-1} + 1} = \sqrt{(\sqrt{x-1} + 1)^2} = \sqrt{x-1} + 1.$$

5.5 e) Le calcul donne $f''(x) = -\frac{1}{4} \frac{1}{(x-1)^{3/2}}$ d'où :

$$f(x) + 4f''(x) = \sqrt{x-1} - \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}} = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}((x-1)^2 - 1) = \frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}.$$

5.6 a) On calcule :

$$\left(\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}\right)^2 = 3 + \sqrt{5} - 2\sqrt{3 + \sqrt{5}}\sqrt{3 - \sqrt{5}} + 3 - \sqrt{5} = 6 - 2\sqrt{9 - 5} = 6 - 2\sqrt{4} = 6 - 4 = 2.$$

De plus, $\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} \geq 0$, donc $\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} = \sqrt{2}$.

5.7 b) On calcule $3 + 2\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2})^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{2} + 1^2 = (1 + \sqrt{2})^2$ et on trouve donc

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

5.7 e) On calcule : $2\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{5} + 5} = \sqrt{(1 + \sqrt{5})^2} = 1 + \sqrt{5}.$

5.8 Appelons A ce nombre barbare, et écrivons-le $A = \alpha - \beta$ en posant

$$\alpha = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} \text{ et } \beta = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}.$$

Plutôt que de se lancer dans des choses compliquées, calculons A^3 à l'aide de l'identité remarquable. On a

$$A^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 = \alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$$

ce qui donne

$$A^3 = 6 - 3A \sqrt[3]{\left(3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}\right)\left(-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}\right)}$$

d'où finalement $A^3 = 6 - 5A$, ce qui est équivalent à $(A - 1)(A^2 + A + 6) = 0$ en observant que 1 est racine évidente de l'équation $t^3 + 5t - 6 = 0$ d'inconnue t , puis finalement 1 est l'unique racine réelle de cette équation, et donc $A = 1$.

Fiche n° 6. Exponentielle et logarithme

Réponses

6.1 a).....	$4 \ln 2$	6.5 b).....	$\frac{1}{2}$	6.8 a).....	$\mathbb{R}$
6.1 b).....	$9 \ln 2$	6.5 c).....	$\frac{1}{3}$	6.8 b).....	ok
6.1 c).....	$-3 \ln 2$	6.5 d).....	$\frac{1}{9}$	6.8 c).....	1
6.1 d).....	$\frac{1}{2} \ln 2$	6.5 e).....	$-\frac{1}{2}$	6.8 d).....	-1
6.1 e).....	$3 \ln 2$	6.5 f).....	$\frac{3}{2}$	6.9 a).....	$x + \ln 2$
6.1 f).....	$2 \ln 2 + 2 \ln 3$	6.6 a).....	-2	6.9 b).....	$\frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$
6.2 a).....	$-\ln 3 - 2 \ln 2$	6.6 b).....	$\frac{1}{\ln 2}$	6.9 c).....	$\ln x-1 $
6.2 b).....	$2 \ln 3 - 2 \ln 2$	6.6 c).....	-17	6.9 d).....	$-\frac{1}{1+x}$
6.2 c).....	$\ln 3 + 11 \ln 2$	6.6 d).....	1	6.9 e).....	$(1+x)^x$
6.2 d).....	$3 \ln 5 + 2 \ln 2$	6.6 e).....	-1	6.10 a).....	$x \geq \frac{\ln 12 + 5}{3}$
6.2 e).....	$-2 \ln 5 + 4 \ln 2$	6.6 f).....	e	6.10 b).....	$x \in [0, 1]$
6.2 f).....	$2 \ln 5 - 2 \ln 2$	6.7 a).....	impaire	6.10 c).....	$x \geq \frac{2}{e}$
6.3.....	$-2 \ln 2 - 2 \ln 5$	6.7 b).....	impaire	6.10 d).....	$x \geq -\frac{1}{12}$
6.4 a).....	$\frac{25}{8} \ln(\sqrt{2}-1)$	6.7 c).....	impaire	6.10 e).....	$\emptyset$
6.4 b).....	$17 + 12\sqrt{2}$	6.7 d).....	impaire	6.10 f).....	$\frac{-13 - \sqrt{273}}{2}$
6.4 c).....	0				
6.4 d).....	0				
6.5 a).....	8				

Corrigés

6.1 a) On a $16 = 4^2 = 2^4$ donc $\ln 16 = 4 \ln 2$.

6.1 c) On a $0,125 = \frac{1}{8}$ donc $\ln 0,125 = -\ln 8 = -3 \ln 2$.

6.1 e) On a $72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$ donc $\ln 72 - 2 \ln 3 = (3 \ln 2 + 2 \ln 3) - 2 \ln 3 = 3 \ln 2$.

6.2 c) On a $0,875 = \frac{7}{8}$ donc

$$\begin{aligned} \ln 21 + 2 \ln 14 - 3 \ln(0,875) &= (\ln 3 + \ln 7) + 2(\ln 2 + \ln 7) - 3(\ln 7 - \ln 8) \\ &= \ln 3 + 2 \ln 3 + 3 \times 3 \ln 2 = 3 \ln 3 + 11 \ln 2. \end{aligned}$$

6.3 On appelle A ce nombre. On a

$$A = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + \cdots + (\ln 98 - \ln 99) + (\ln 99 - \ln 100)$$

donc en simplifiant les termes deux par deux finalement il reste $A = \ln 1 - \ln 100$, c'est-à-dire $A = -\ln 100$ où $100 = 2^2 \times 5^2$, d'où le résultat $A = -2(\ln 2 + \ln 5)$

On peut écrire plus rigoureusement ce calcul :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{99} \ln \frac{k}{k+1} = \sum_{k=1}^{99} (\ln k - \ln(k+1)) \\ &= \sum_{k=1}^{99} \ln k - \sum_{k=1}^{99} \ln(k+1) = \sum_{k=1}^{99} \ln k - \sum_{j=2}^{100} \ln j \end{aligned}$$

en effectuant le changement d'indice $j = k + 1$ d'où finalement $A = \ln 1 - \ln 100 = -2(\ln 2 + \ln 5)$.

6.4 a) On a $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$

On a donc

$$\alpha = \frac{7}{16} \ln(3 + 2\sqrt{2}) - 4 \ln(\sqrt{2} + 1) = \frac{7}{16} \ln((1 + \sqrt{2})^2) + 4 \ln \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{7}{8} \ln(1 + \sqrt{2}) + 4 \ln \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

d'où finalement $\alpha = -\frac{7}{8} \ln \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + 4 \ln \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{25}{8} \ln \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{25}{8} \ln(\sqrt{2} - 1)$.

6.4 c) On a $\gamma = \ln\left(\left((2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})\right)^{20}\right) = \ln((4 - 3)^{20}) = 0$

6.6 b) On a $e^{-\ln \ln 2} = e^{(-1) \ln(\ln 2)} = (\ln 2)^{-1} = \frac{1}{\ln 2}$.

6.6 e) On a $\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln e^2)}\right) = \frac{1}{2} \ln(\exp(-\ln e^2)) = \frac{1}{2}(-\ln e^2) = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$.

6.7 a) f_1 est définie sur $] -2021, +2021[$ qui est symétrique par rapport à 0 et

$$\forall x \in] -2021, +2021[, \quad f(-x) = \ln \frac{2021 - x}{2021 + x} = \ln \frac{1}{\frac{2021+x}{2021-x}} = -\ln \frac{2021+x}{2021-x} = -f_1(x).$$

6.7 b) On a $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leq |x| < \sqrt{x^2 + 1}$ donc f_2 est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a

$$\begin{aligned} f_2(-x) &= \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) \\ &= \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \ln \frac{(-x + \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \ln \frac{-x^2 + (x^2 + 1)}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = -f_2(x). \end{aligned}$$

6.10 f) Attention à l'ensemble de définition de ces deux équations...

Pour la première équation, on cherche les solutions dans $] -\infty, -5[\cap \left(]61, +\infty[\cap] -\infty, -7[\right)$, qui est l'ensemble vide, donc la première équation n'admet aucune solution.

Pour la seconde, on cherche les solutions dans $] -\infty, -5[\cap \left(] -\infty, -7[\cup]61, +\infty[\right)$, c'est-à-dire dans l'intervalle $] -\infty, -7[$. Dans ce cas, un réel x appartenant à $] -\infty, -7[$ est solution de l'équation si et seulement si x vérifie $x^2 + 13x - 26 = 0$. Or, ce trinôme admet deux racines réelles : $x_1 = \frac{-13 - \sqrt{273}}{2}$ et $x_2 = \frac{-13 + \sqrt{273}}{2}$. Seul x_1 convient car $x_1 \in] -\infty, -7[$ et $x_2 \notin] -\infty, -7[$.